第 9 章 數學附錄

一 有限母體的樣本平均數與變異數

自有限母體 $X \sim (\mu, \sigma^2)$ (母體個數 N)中隨機抽取(抽出不放回) n 個為一組隨機樣本，則樣本平均數 $\overline{X}$ 的平均數為 μ，變異數為：

$$\frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

證明

$$V(\overline{X}) = V(\frac{\sum_{i=1}^{n} X}{n}) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \Lambda + X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[V(X_1) + \Lambda + V(X_n) + 2Cov(X_1, X_2) + \Lambda + 2Cov(X_{n-1}, X_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sigma^2 + \sigma^2 + \Lambda + \sigma^2 + \sum_i^n \sum_j^n Cov(X_i, X_j)\right] \qquad i \neq j$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 + n(n-1)(\frac{-\sigma^2}{N-1})\right] + \frac{1}{n^2}(n\sigma^2 \cdot \frac{N-n}{N-1}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

式中：$\sum_i^n \sum_j^n Cov(X_i, X_j) = n(n-1)(\frac{-\sigma^2}{N-1})$。證明如下：

X_i 代表抽出的第 i 個樣本點，其可能的值表為 $x_1, x_2, ..., x_N$，因此在任何兩個樣本點 X_1, X_2 的共變數可表為：

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) \qquad i \neq j$$

$$= \sum_i^N \sum_j^N x_i x_j f(x_i, x_j) - \mu^2 = \sum_i^N \sum_j^N x_i x_j f(x_i) f(x_j \mid x_i) - \mu^2$$

$$= \sum_i^N \sum_j^N x_i x_j \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} - \mu^2$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N \sum_j^N x_i x_j - \mu^2 \qquad ①$$

因 $\mu^2 = \frac{1}{N^2}(x_1 + ... + x_N)^2 = \frac{1}{N^2}(\sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_i^N \sum_j^N x_i x_j)$ ②

$$E(X_i^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sigma^2 + \mu^2 \qquad ③$$

可得 $\sum_i^N \sum_j^N x_i x_j = N^2 \mu^2 - \sum_{i=1}^N x_i^2 \qquad i \neq j$ ④

將④代入①可得：

$$
\begin{aligned}
Cov(X_i, X_j) &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N \sum_j^N x_i x_j - \mu^2 \\
&= \frac{1}{N(N-1)} \left[N^2 \mu^2 - (N\mu^2 + N\sigma^2) \right] - \mu^2 \\
&= \frac{-N}{N(N-1)} \sigma^2 = \frac{-1}{N-1} \sigma^2
\end{aligned}
$$

再加總可得：

$$
\sum_i^n \sum_j^n Cov(X_i, X_j) = n(n-1)\left(\frac{-\sigma^2}{N-1}\right) \qquad i \neq j
$$