第 18 章　數學附錄

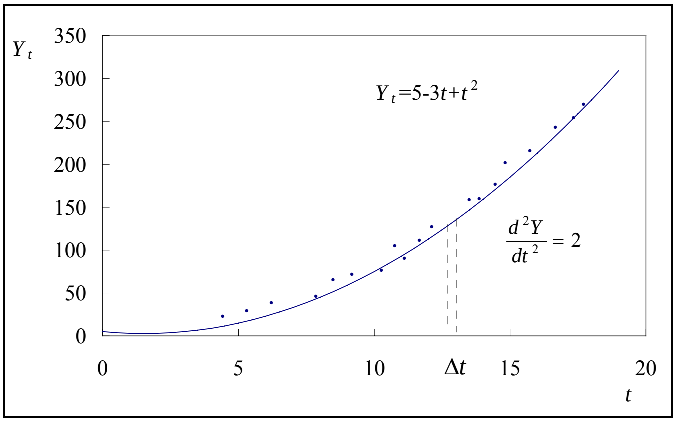
前面我們介紹的是線性模型，下面我們簡單介紹幾個分線性模型。

一 拋物線模型

拋物線模型設為：

$$Y_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t$$

圖20.15　　拋物線模型



可利用OLS進行估計a,b,c，拋物線趨勢的二階微分為常數，即$\dfrac{d^2Y}{dt^2} = 2c$，

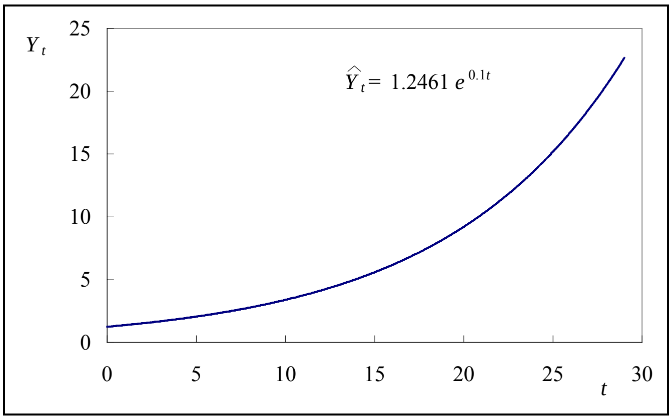
因此時間數列的觀察值的二階差$\Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$接近常數($\Delta Y_t$稱為一階差，$\Delta Y_t$的定義為：$Y_t - Y_{t-1}$)，則時間數列的長期趨勢為一拋物線趨勢。

二 指數趨勢(又稱半對數趨勢)

指數模型為：

$$Y_t = e^{a+bt+\varepsilon}$$

圖20.16　　指數模型$b>0$



取對數得：

$$\ln Y_t = a + bt + \varepsilon$$

可利用OLS進行估計a、b。根據指數趨勢模型可知：

$$\frac{d \ln Y_t}{dt} = \frac{\frac{dY_t}{Y_t}}{dt} = b$$

亦即成長率為一固定值，因此若時間數列觀察值$\dfrac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \dfrac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}}$接近一固定值，則時間數列為一指數趨勢，指數趨勢依$b>0$或$b<0$可得長期增加或遞減的趨勢圖。如圖20.16為成長模型，如圖20.17為萎縮模型。指數模型亦可設為：

$$Y_t = ab^t\varepsilon$$

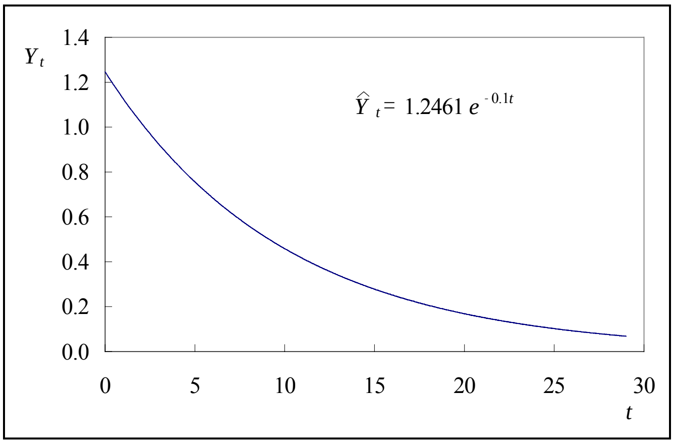
於是取對數亦可得：

$$\ln Y_t = \ln a + \ln bt + \ln \varepsilon$$

$$Y_t' = a' + b't + \varepsilon'$$

當ε'滿足迴歸方程式的假設條件，則仍可用OLS進行估計a'，b'再取指數得a、b的估計值。

圖20.17　指數模型$b<0$

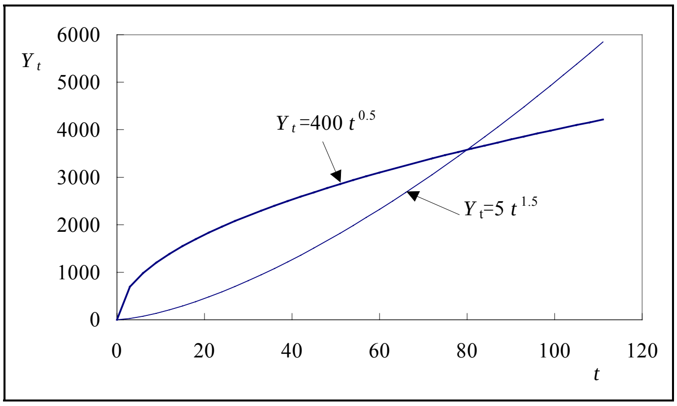


三 雙對數模型

雙對數模型表為：

$$Y_t = at^b\varepsilon$$

圖20.18　雙對數模型



取對數得：

$$\ln Y_t = \ln a + b\ln t + \ln\varepsilon$$

可利用OLS進行估計$\ln a, b$。

根據雙對數模型可知：

$$\frac{d\ln Y_t}{d\ln t}=\frac{dY_t/Y_t}{dt/t}=b$$

亦即彈性為一固定值，因此若時間數列的 $\frac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}}\Big/\frac{\Delta t}{t}$ 接近固定值，則時間數列為一雙對數模型。

四　羅吉斯模型(logistic model)

羅吉斯模型表為：

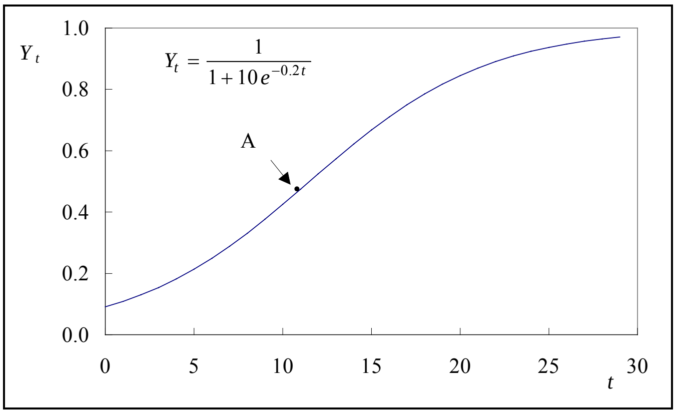
$$Y_t=\frac{K}{1+b\cdot e^{-at}}+\varepsilon$$

根據該模型，當 $t\to\infty$ 時，$Y_t\to K$；當 $t\to-\infty$ 時，$Y_t\to 0$，模型的截距為 $\frac{K}{1+b}$，此外，對模型進行二次微分可得：

$$\frac{d^2Y_t}{d^2t}=\frac{a}{K}(K-2Y_t)\frac{dY_t}{dt}$$

令上式為0，可得出反折點(inflection point)A點在 $t=(1/a)\ln b, Y=k/2$。以圖形表示如下：

圖20.19　　羅吉斯模型



有些產品的銷售額可能如羅吉斯曲線，隨著時間銷售量呈遞增的增加率，
到了轉折點的A點，銷售量雖仍增加，但其增加率開始遞減，隨著時間的經過，該產品的銷售量會達到一個飽和點。