第十章　數學附錄

一　設母體 $X \sim (\mu, \sigma^2)$，自 X 母體中隨機抽取 n 個為樣本 $(X_1, X_2, ..., X_n)$，令 $\overline{X}$ 、 S^2 分別為樣本平均數與變異數，則

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

證明

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(X-\mu)-(\overline{X}-\mu)\right]^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2} - 2\frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)(\overline{X}-\mu)}{\sigma^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2} - 2\frac{(X-\mu)\sum(X-\mu)}{\sigma^2} \quad \Theta \sum(X-\mu)=0$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)^2}{\sigma^2} - (\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2$$

即 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$

而 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$， $\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$，因此根據卡方分配加法定理知：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

二　證明 $E(S^2) = \sigma^2$， $V(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$。

證明　已知 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$，根據卡方隨機變數的平均數知：

$$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1 = \frac{(n-1)}{\sigma^2}E(S^2)$$

可得 $E(S^2) = \sigma^2$，根據卡方隨機變數的變異數知

$$V\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1)=\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}V(S^2)$$

可得$V(S^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

三　設母體 $X\sim(\mu,\sigma^2)$，自 X 母體中隨機抽取 n 個為樣本 $(X_1,X_2,...,X_n)$，令 $\overline{X}$、S^2 分別為樣本平均數與變異數，則

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S^2/\sqrt{n}}\sim t_{n-1}$$

證明

$$(\frac{\overline{X}-\mu}{S^2/\sqrt{n}})^2=\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{S^2/n}=\frac{(\overline{X}-\mu)^2/\frac{\sigma^2}{n}}{S^2/\sigma^2}$$ （分子分母均除σ^2）

$$=\frac{(\overline{X}-\mu/\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2}{(n-1)S^2/(n-1)\sigma^2}=\frac{Z^2}{\chi^2_{n-1}/n-1}$$

(分母上下乘$n-1$)

因為$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$，故

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\sqrt{\frac{Z^2}{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}}=\frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}}\sim t_{n-1}$$

因此可證得$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$在 X 為常態，隨機樣本的條件下為一以自由度$n-1$的t分配。

四　設$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，當n很大時，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim N(n-1,2(n-1))$，我們可根據$Z$分配求$\sigma^2$的信賴區間。

因$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim N(n-1,2(n-1))$，根據$Z$分配，可得：

$$P(-Z_{\alpha/2}<\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}<Z_{\alpha/2})=1-\alpha$$

$$P\left((n-1)-Z_{\alpha/2}\sqrt{2(n-1)}\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le(n-1)+Z_{\alpha/2}\sqrt{2(n-1)}\right)=1-\alpha$$

上式取倒數：

$$P\left(\frac{1}{(n-1)+Z_{\alpha/2}\sqrt{2(n-1)}} \le \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \frac{1}{(n-1)-Z_{\alpha/2}\sqrt{2(n-1)}}\right) = 1-\alpha$$

上式乘 $(n-1)S^2$ ：

$$P(\frac{(n-1)S^2}{(n-1)+Z_{\alpha/2}\sqrt{2(n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{(n-1)-Z_{\alpha/2}\sqrt{2(n-1)}}) = 1-\alpha$$

於是可得 σ^2 的信賴區間為：

$$P(\frac{S^2}{1+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}} \le \sigma^2 \le \frac{S^2}{1-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}}) = 1-\alpha$$