

第9章 統計估計

學習目的

1. 瞭解點估計的意義、估計的步驟與限制。
2. 瞭解優良估計式的性質。
3. 瞭解區間估計的意義。
4. 瞭解大樣本與小樣本母體常態、變異數已知與未知下，單一母體平均數區間估計的方法。知悉 t 分配的意義與機率值。
5. 瞭解單一母體比例區間估計的方法。
6. 瞭解單一母體變異數區間估計的方法。瞭解卡方分配的意義與卡方值。
7. 瞭解區間估計的方法在經濟、政治、社會及企業管理方面的應用。
8. 利用 Excel 做統計估計。

含課本重點整理，惟仍應研讀課本之詳細內容

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

統計估計

○ 統計估計

統計估計是利用樣本統計量去推估母體參數的方法。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

點估計的意義與限制

● 點估計

由母體抽取一組樣本數為 n 的隨機樣本，並以由此得到的樣本統計量做為母體參數的估計值。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

點估計的意義與限制

● 點估計的步驟

- ①抽取具代表性的樣本
- ②選擇一個較佳的樣本統計量做為估計式
- ③計算樣本統計量的值
- ④以樣本統計量的值推論母體參數值並做決策

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

估計式的評斷標準

○ 不偏性估計式

若估計式的平均數等於母體參數值，則該估計式為不偏估計式，否則為偏誤估計式。即若 $E(\hat{\theta} - \theta) = 0$ ，則 $\hat{\theta}$ 為 θ 的不偏估計式。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

估計式的評斷標準

○ 相對有效性

設 $\hat{\theta}_1$ 、 $\hat{\theta}_2$ 均為 θ 的不偏誤估計式，若 $\hat{\theta}_1$ 的平均平方誤差相對 $\hat{\theta}_2$ 的平均平方誤差較小，即：

$$\frac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)} < 1$$

則 $\hat{\theta}_1$ 相對 $\hat{\theta}_2$ 為有效估計式。

○ 不偏估計式的相對有效性

設 $\hat{\theta}_1$ 、 $\hat{\theta}_2$ 均為 θ 的不偏誤估計式，若

$$\frac{V(\hat{\theta}_1)}{V(\hat{\theta}_2)} < 1$$

則 $\hat{\theta}_1$ 相對 $\hat{\theta}_2$ 為有效估計式。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

估計式的評斷標準

○ 一致性估計式

設 $\hat{\theta}_n$ 為樣本數 n 之 θ 的估計式，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$ ，則 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 之一致性估計式。其中 ε 為正的極小數值。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

估計式的評斷標準

○ 一致性估計式的定理

若 $\hat{\theta}_n$ 為不偏誤估計式或漸近不偏估計式，且當 n 趨於無窮大時，其變異數趨近於零，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$ ，則 $\hat{\theta}_n$ 為 θ 的一致性估計式。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

估計式的評斷標準

○判斷估計式的應注意事項

- (1) 不偏性具平均的性質
- (2) 有效性
- (3) 一致性為大樣本的性質

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

區間估計的意義

○區間估計

對未知的母體參數估計出一個上下限的區間，並指出該區間包含母體參數的可靠度。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

區間估計的意義

○ 信賴區間

信賴區間是在一個既定的信賴水準下所構成的一個區間。
是由樣本統計量及抽樣誤差所構成的一個(包含上限，下限的)區間。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

區間估計的意義

○ 信賴水準(信賴係數)

信賴水準是指信賴區間包含母體參數的信心(或稱可靠度，信賴度)。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—大樣本

○ 大樣本變異數已知，母體平均數的信賴區間

信賴水準 $1-\alpha$ 下，以 \bar{X} 估計 μ 所得的信賴區間為：

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$$

$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 稱為信賴區間下限， $\bar{X} + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 稱為信賴區間上限。

○ 大樣本變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—大樣本

○ 區間估計的步驟

- ①步驟1 選擇較佳的點估計式並計算點估計值
- ②步驟2 取得樣本統計量的抽樣分配
- ③步驟3 導出母體參數的信賴區間
- ④步驟4 求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—大樣本

○95%信賴水準

95%信賴水準的含意是指，隨機抽取一組樣本所得的區間包含母體平均數的機率（或稱可靠度、信賴度）為0.95。或說區間不包含母體平均數的機率為0.05。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—大樣本

○ 信賴區間(大樣本，母體變異數已知)

信賴水準 $1-\alpha$ 下，以 \bar{X} 估計 μ 所得的信賴區間為：

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$$

$\bar{X} - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 稱為信賴區間下限， $\bar{X} + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 稱為信賴區間上限。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—大樣本

表 9.6 不同信賴水準下母體平均數 μ 的信賴區間

信賴水準 $1-\alpha$	α	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$	信賴區間 $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$
0.90	0.10	0.05	1.645	$\bar{X} \pm 1.645 \sigma_{\bar{X}}$
0.95	0.05	0.025	1.96	$\bar{X} \pm 1.96 \sigma_{\bar{X}}$
0.99	0.01	0.005	2.575	$\bar{X} \pm 2.575 \sigma_{\bar{X}}$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—大樣本

○信賴區間長度的決定因素

- (1) 所選擇的點估計式的抽樣分配
- (2) 樣本數
- (3) 機率區間上下限的取法
- (4) 信賴係數

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—大樣本

- 大樣本變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—小樣本

- 小樣本常態母體變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—小樣本

○ t 分配

自常態母體 $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ 隨機抽取樣本 (X_1, X_2, \dots, X_n) ，則統計量

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

為自由度 $n-1$ 的 t 分配。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—小樣本

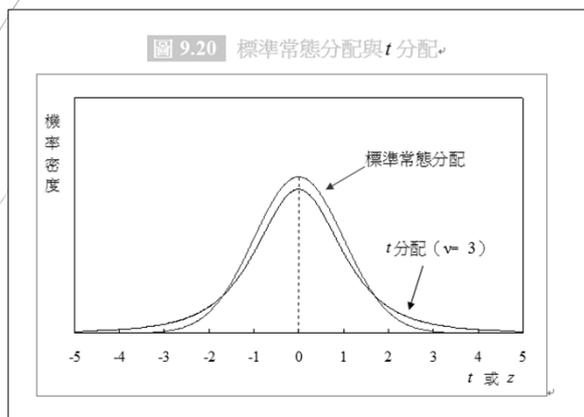
○ t 分配的性質

- ① t 分配為一個以平均數0為中心的對稱分配，不同的自由度 ν 有不同的 t 分配。 ν 為 t 分配的惟一參數。
- ② t 分配不與橫軸相交，亦即 t 值的範圍在 $(-\infty, \infty)$ 之間。 t 分配曲線比標準常態曲線為平坦，亦即分配曲線的高度較低，分散程度較大。
- ③ t 分配的平均數與變異數為： $E(t) = 0$ ， $V(t) = \frac{\nu}{\nu-2}$
- ④ 自由度趨近於無窮大時 ($\nu \rightarrow \infty$)， t 分配趨近於標準常態分配，即 $t_\nu \sim N(0,1)$ 。一般若 $\nu \geq 30$ ，則以標準常態分配代替 t 分配。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—小樣本



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—小樣本

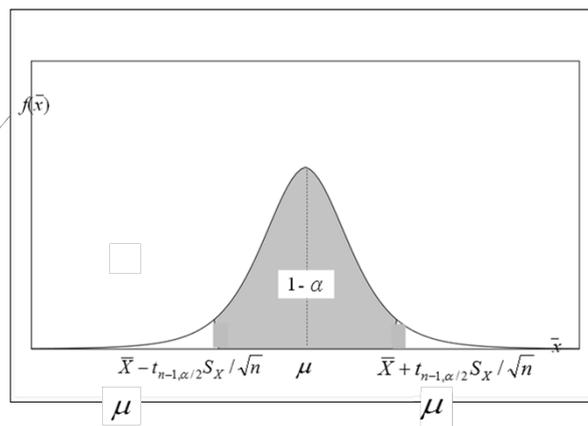
表 9.8 t 值表 (部份)

df	$t_{0.10}$	$t_{0.05}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	df
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.473	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.449	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	∞

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—小樣本

圖9.25 $(1 - \alpha)\bar{X}$ 的機率區間

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體平均數的區間估計—小樣本

- 小樣本常態母體變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\bar{X} \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體比例的區間估計

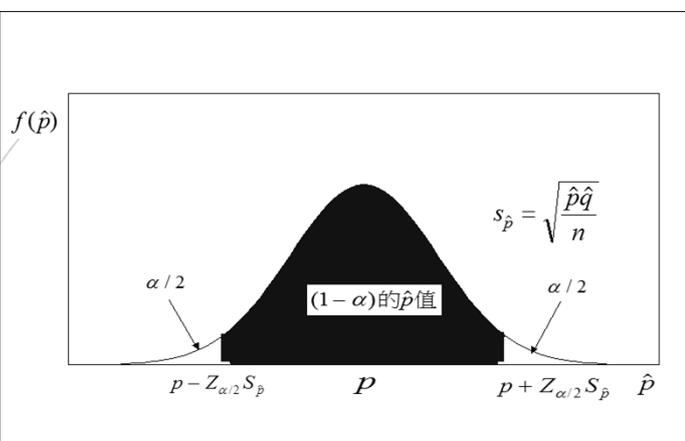
○ 大樣本母體比例的信賴區間

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體比例的區間估計

圖9.26 $(1 - \alpha)\hat{p}$ 的機率區間

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體比例的區間估計

- 大樣本母體比例的信賴區間（常用公式）

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

樣本數的選擇—估計母體平均數時

- 估計誤差不超過 d 值

$$\bar{X} - \mu = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

- 估計母體平均數時的樣本數

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{d^2}$$

- 估計母體平均數時的樣本數(母體變異數未知)

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 S^2}{d^2}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

樣本數的選擇—估計母體比例時

- 估計母體比例時的樣本數

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 \hat{p}\hat{q}}{d^2}$$

- 估計母體比例時的樣本數(保守估計)

$$n \geq \frac{Z_{\alpha/2}^2 (0.25)}{d^2}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體變異數的區間估計

- 樣本變異數

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

- 卡方統計量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

該統計量為自由度 $(n-1)$ 的卡方分配

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體變異數的區間估計

○ 卡方分配的性質

① 卡方分配為一定義在大於等於0(正數)範圍的右偏分配，不同的自由度決定不同的卡方分配。

② 卡方分配只有一個參數即自由度，表為 v 。卡方分配的平均數與變異數為：

$$E(\chi^2) = v, V(\chi^2) = 2v$$

③ 卡方分配當自由度增加而逐漸對稱，當自由度趨近於無窮大時($v \rightarrow \infty$)，卡方分配會趨近於常態分配。

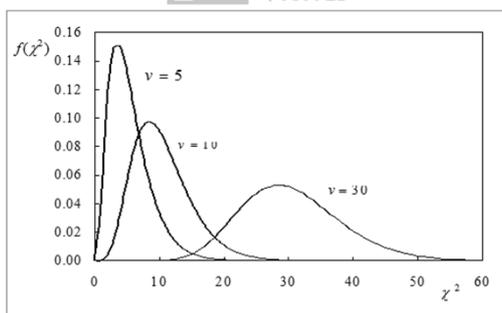
④ 設 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，令 $Z^2 = \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2$ ，則 Z^2 為自由度1的卡方分配。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體變異數的區間估計

圖 9.27 卡方分配



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體變異數的區間估計

表 9.10 卡方值

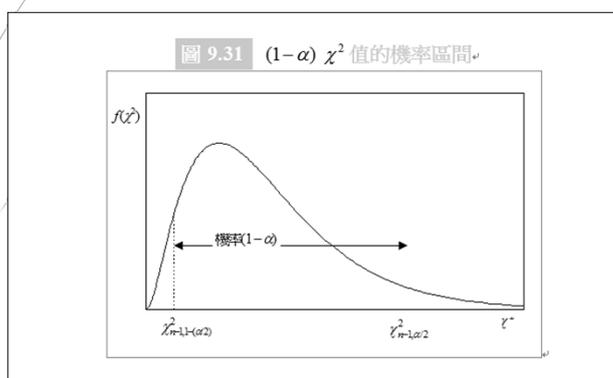
df	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.005}$	df
1	.0000393	.0039321	.0157908	2.70554	3.84146	7.87944	1
2	.0100251	.102587	.210720	4.60517	5.99147	10.5966	2
3	.0717212	.351846	.584375	6.25139	7.81473	12.8381	3
4	.206990	.710721	1.063623	7.77944	9.48773	14.8602	4
5	.411740	1.145476	1.61031	9.23635	10.0705	16.7496	5
6	.675727	1.63539	2.20413	10.6446	12.5916	18.5476	6
...
17	5.69724	8.67176	10.0852	24.7690	27.5871	35.7185	17
18	6.26481	9.39046	10.8649	25.9894	28.8693	37.1564	18
19	6.84398	10.1170	10.6509	27.2036	30.1435	38.5822	19
20	7.43386	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	39.9968	20
...

資料來源：摘錄自附表表六。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體變異數的區間估計



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

母體變異數的區間估計

○ 母體變異數的信賴區間

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \alpha/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

9.3. 一家雜誌社欲知其讀者的平均年齡，以作為雜誌內容方向的參考，根據其對訂閱戶抽查，得知讀者平均年齡為 36 歲。

- ① 當樣本數為 49，母體標準差為 6 歲，求該雜誌讀者平均年齡的 95% 信賴區間。
- ② 當樣本數為 49，樣本標準差為 6 歲，求該雜誌讀者平均年齡的 95% 信賴區間。
- ③ 當樣本數為 25，母體分配未知，但知母體標準差為 6 歲，求該雜誌讀者平均年齡的 95% 信賴區間。
- ④ 當樣本數為 25，母體分配為常態，母體標準差為 6 歲，求該雜誌讀者平均年齡的 95% 信賴區間。
- ⑤ 當樣本數為 25，母體分配為常態，樣本標準差為 6 歲，求該雜誌讀者平均年齡的 95% 信賴區間。

9.5 某釣魚用的細繩強度呈常態分配，經試驗 5 次得強度分別如下（單位：公斤）：

4.1、3.9、3.8、4.5、4.6。

- ① 試求此種細繩平均強度之 95% 信賴區間。
 - ② 若我們想要以樣本平均數來估母體平均數的誤差在 0.1 公斤內，且已知母體變異數是 0.15，則樣本數應為多少？
- 9.7 台灣有意自美國引入愛國者飛彈，該型飛彈素以攔截地對地飛彈著名。今在一次實彈演習中，40 顆愛國者型飛彈成功攔截了 28 顆的地對地飛彈。
- ① 請問成功攔截機率之估計值。
 - ② 又成功攔截機率的 90% 信賴區間。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第9章 統計估計

- 9.9 某茶葉製造公司欲瞭解其市場的佔有率，乃在市場上進行抽樣調查。假設該公司要求樣本比例與母體之誤差不能超過 0.01，且有 95%的信賴度，則樣本數應為何？。
- 9.10 振輝工廠宣稱其生產之酒瓶的容積為 500c.c.，變異數不超過 3c.c.。A 酒廠欲購買其酒瓶，抽取 25 個酒瓶測其容積，得平均數為 495c.c.，變異數為 5c.c.，試利用上述資料，在信賴水準 95%下，酒瓶容積之平均數與變異數之信賴區間，該信賴區間是否可接受廠商之宣稱（假設酒瓶的容積為常態分配）？。
- 9.11 為了確知某種新推出的速食麵每包的重量，某人分別自各超商購買了 36 包該種速食麵，其平均數為 500 公克，變異數為 900 公克（假設重量為常態分配）。
- ① 試求此種速食麵每包平均重量的 90%信賴區間。
 - ② 試求此種速食麵每包變異數的 90%信賴區間。
 - ③ 試求此種速食麵每包標準差的 90%信賴區間。
- 9.14 試討論影響信賴區間可靠度與精確度的因素。