

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 學習目的

1. 瞭解抽樣的意義以及抽樣的重要性。
2. 瞭解抽樣誤差與非機率誤差。
3. 知悉樣本大小、抽樣成本和抽樣誤差的關係。
4. 瞭解簡單隨機抽樣。
5. 瞭解樣本統計量：樣本平均數、樣本比例的抽樣分配的形狀及其平均數、變異數的計算。
6. 瞭解中央極限定理及其應用。
7. 瞭解其他抽樣方法
8. 利用Excel來做抽樣。

含課本重點整理，惟仍應研讀課本之詳細內容

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 抽樣的重要性與抽樣誤差

#### ○抽樣的重要性

人們在研究某些問題或現象時，有時並不直接探討母體，而係經由對樣本的研究分析，以獲致某些樣本統計量，然後再利用這些樣本統計量去推測母體的參數，主要是因為：①有限的資源，②毀壞性的實驗，③概念性的母體，無法全部觀察，④樣本較母體小，在資料搜集與整理時較容易且較精確。

統計推論係利用樣本統計量去推論母體的特質，而樣本是否具有代表性會受抽樣方法的影響，因此抽樣方法非常重要。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 抽樣的重要性與抽樣誤差

## ○ 抽樣誤差

抽樣誤差是樣本統計量與相對應的母體參數間的差異。此種差異來自抽樣過程的機遇(chance)，抽樣方法及推論方法的不同。

## ○ 非抽樣誤差

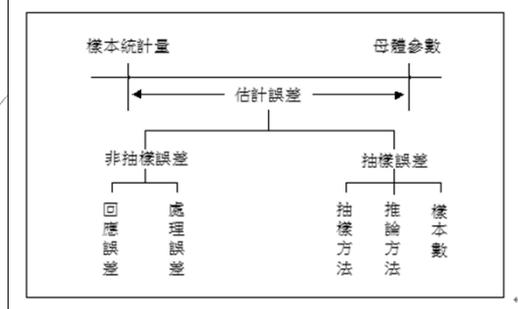
非抽樣誤差主要來自調查時的執行與事後在記錄、整理資料時所發生的錯誤。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 抽樣的重要性與抽樣誤差

圖 8.4 抽樣誤差與非抽樣誤差



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 抽樣的重要性與抽樣誤差

#### ○ 抽樣單位與抽樣底冊

抽樣單位是抽樣母體中的一個母體元素或一祖母體元素。抽樣底冊是抽樣單位的名冊或一覽表。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 簡單隨機抽樣

#### ○ 簡單隨機抽樣的意義

簡單隨機抽樣是抽樣母體中所有可能被抽出的樣本組被抽出的機率均相等的抽樣方法。

#### ○ 簡單隨機抽樣的實施方式

##### ① 抽籤式

##### ② 用電腦做隨機抽樣

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 抽樣分配

#### ○ 抽樣分配

樣本統計量為隨機樣本的函數，而隨機樣本是由 $n$ 個隨機變數 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 所組成的，故樣本統計量亦為一隨機變數，其機率分配稱為抽樣分配。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 樣本平均數的抽樣分配

#### ○ 母體分配

母體分配是母體元素的機率分配。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 樣本平均數的抽樣分配

## ○ 樣本平均數的抽樣分配

設母體為隨機變數 $X$ ，其機率分配為 $f(x)$ ，若自母體中簡單隨機抽取 $n$ 個元素為一組樣本，表為 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，若令

$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$ ，則 $\bar{X}$ 為樣本平均數。其機率分配表為 $f(\bar{x})$ ，稱為樣本平均數的抽樣分配。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 樣本平均數的抽樣分配

○  $\bar{X}$ 的平均數與變異數

$\bar{X}$ 抽樣分配的平均數與變異數稱為 $\bar{X}$ 的平均數與變異數。以符號 $\mu_{\bar{X}}$ 或 $E(\bar{X})$ 及 $\sigma_{\bar{X}}^2$ 或 $V(\bar{X})$ 分別表示。

○  $\bar{X}$ 抽樣分配的平均數

$\bar{X}$ 抽樣分配的平均數等於母體平均數，即

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 樣本平均數的抽樣分配

## ○ 樣本平均數的平均數與變異數

- 無限母體樣本平均數的變異數(
- $\sigma_{\bar{X}}^2$
- )與標準差(
- $\sigma_{\bar{X}}$
- )

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 有限母體抽出不放回樣本平均數的變異數(
- $\sigma_{\bar{X}}^2$
- )與標準差(
- $\sigma_{\bar{X}}$
- )

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{V(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 樣本平均數的抽樣分配

## ○ 樣本平均數抽樣分配的形狀

- 常態母體
- $\bar{X}$
- 的抽樣分配

若母體為常態分配，平均數為 $\mu$ ，標準差為 $\sigma$ ，則不論樣本數為何，樣本平均數 $\bar{X}$ 的抽樣分配亦為常態分配，其平均數和標準差分別為：

$$\mu_{\bar{X}} = \mu, \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 中央極限定理(非常態母體
- $\bar{X}$
- 的抽樣分配)

無論母體為何種分配，自母體簡單隨機抽取 $n$ 個為一組樣本，若樣本數 $n$ 夠大(一般認為 $n \geq 30$ )，則樣本平均數的抽樣分配會趨近於常態分配，即：

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 中央極限定理

○ 中央極限定理(非常態母體  $\bar{X}$  的抽樣分配)

無論母體為何種分配，自母體簡單隨機抽取  $n$  個為一組樣本，若樣本數  $n$  夠大(一般認為  $n \geq 30$ )，則樣本平均數的抽樣分配會趨近於常態分配，即：

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 中央極限定理

表 8.9  $\bar{X}$  的抽樣分配

樣本	母體分配	抽樣分配
大樣本 ( $n \geq 30$ )	母體為常態分配	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
	母體非常態分配	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
小樣本 ( $n < 30$ )	母體為常態分配	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
	母體非常態分配	$\bar{X}$ 的抽樣分配決定於母體分配

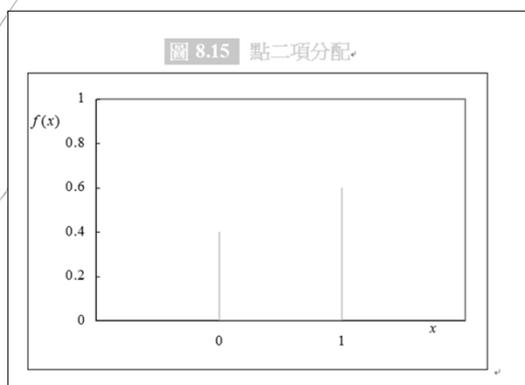
註：◎若母體為有限母體，且  $\frac{n}{N} > 0.05$ ，則  $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$ 。

◎若母體為有限母體，且  $n/N > 0.05$ ，則  $\bar{X}$  不一定為常態分配，因  $(X_1, \dots, X_n)$  不獨立。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 樣本比例的抽樣分配



現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 樣本比例的抽樣分配

## ○ 母體比例

$$p = K / N$$

$N$ ：母體個數， $K$ ：母體中A類別的個數。

## ○ 樣本比例

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

## ○ 樣本比例的平均數

$$E(\hat{p}) = \mu_{\hat{p}} = p$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 樣本比例的抽樣分配

## ○ 樣本比例的變異數與標準差

## ① 無限母體

$$V(\hat{p}) = \sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n}$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\sigma_{\hat{p}}^2} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

## ② 有限母體

$$V(\hat{p}) = \sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

## 樣本比例的抽樣分配

○ 大樣本 ( $np > 5$  及  $nq > 5$ ) 樣本比例的抽樣分配

依據中央極限定理，當大樣本時， $\hat{p}$  的抽樣分配會趨近常態分配：

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

## ○ 小樣本樣本比例的抽樣分配

## ○ 無限母體

$$\hat{p} \sim \text{二項分配}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

○ 有限母體 ( $n/N \geq 0.05$ )

$$\hat{p} \sim \text{超幾何分配}\left(p, \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}\right)$$

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 其他抽樣方法

#### ○ 分層抽樣的意義

分層抽樣是將母體依其特性或依與調查目的有關的性質分成幾個類或組，母體中的每一個個體或元素都屬於其中的一層，而且是唯一的一層。分層之後再從各層中簡單隨機抽取樣本。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 其他抽樣方法

#### ○ 部落抽樣的意義

部落抽樣是先將母體中相鄰的某些群體劃分為一個不同的部落 (cluster)，母體中的每一個元素均屬於其中的一個部落，且是唯一的一個部落。然後再從這些部落中隨機抽取部落，並對抽出的部落進行普查的抽樣方法，又稱集團抽樣。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 其他抽樣方法

#### ○ 系統抽樣的意義

系統抽樣法是自母體自然隨機排列的資料中，每隔一定間隔選取一個樣本，直至抽滿 $n$ 個樣本為止。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 其他抽樣方法

#### ○ 分段抽樣的意義

分段抽樣法是將母體按照某些特性或某種分類標準分為數個部落或層別，先由這些部落或層別中抽出幾個部落或層別，此為第一段。然後再由已經抽出的部落或層別，依特性或分類標準再抽出部落或層別，此為第二階段，如此依序為之，最後再依隨機或系統或其它方法抽出樣本。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

### 其他抽樣方法

#### ○ 判斷抽樣法

統計人員或調查研究人員根據自己的專長、知識、研究的目的來選取代表性的樣本，此種抽樣方法稱為判斷抽樣法，又稱為目的抽樣法。

#### ○ 方便抽樣法

方便抽樣法是調查研究人員以現有的或方便取得的方式來抽取樣本的方法。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

8.3 一個生日宴會中有 30 個滿 20 歲的學生以及 20 個未滿 20 歲的學生。你從滿 20 歲的當中隨機抽出 3 個，另外從未滿 20 歲的當中隨機抽出 2 個，然後問他們對喝酒的看法，請問此時每位學生被抽中的機率為何？此種抽樣方法是簡單隨機抽樣嗎？為什麼？這種是何種抽樣方法？

8.5 試分別說明簡單隨機抽樣、分層隨機抽樣、部落抽樣及系統抽樣 4 種抽樣方法適用的情形，並說明這些抽樣方法的優缺點。

8.9 武陵某農場生產水梨，其重量為一常態分配，平均數為 560 公克，標準差為 20 公克，試求下列各小題：

- ① 水梨重量大於 580 公克的機率。
- ② 抽取 16 個水梨，16 個水梨平均重量大於 580 公克的機率。
- ③ 若 10 個水梨裝成一盒，問一盒水梨重量的平均數與變異數為何？
- ④ 若要求一盒的水梨重量要在 5,500~5,700 公克之間時，則有多少箱的水梨不符合規定？

8.11 已知某紡織公司員工為 200 人，其平均年資為 10 年，標準差為 6 年。

- ① 若以抽出放回的方式隨機抽取 49 人，求這 49 人的平均年資介於 9 與 11 年之間的機率。
- ② 若以抽出不放回的方式隨機抽取 49 人，求這 49 人的平均年資介於 9 與 11 年之間的機率。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊 2015

## 第8章 簡單隨機抽樣與抽樣分配

- 8.13 A 牌手錶的平均使用年限為 8 年，標準差為 1.4 年，B 牌手錶的平均使用年限為 9 年，標準差為 1.9 年。若將 A、B 兩種牌子的手錶各選出 64 個樣本，求 B 牌手錶平均使用年限比 A 牌手錶長 1.5 年的機率。
- 8.15 某農場出產的蜂蜜，每瓶重量呈常態分配，平均重量為 500 公克，標準差為 24 公克。一食品檢驗單位抽檢 16 瓶該農場的蜂蜜，試問：
- ① 該 16 瓶蜂蜜的平均重量在 490 至 510 公克之間的機率為多少？
  - ② 該 16 瓶蜂蜜的平均重量在多少公克以上的機率為 0.1？
- 8.17 假設若有一母體包含 6 個值：1、2、3、4、5、6。
- ① 將此 6 值視為一組樣本，求其標準差。
  - ② 若自此母體中抽出  $n=3$  之隨機樣本，並假設抽出放回，求樣本平均數的平均數及變異數。
  - ③ 若抽出不放回，則其樣本平均數的平均數及變異數又為何？