第5章 機率論

學習目的

1.定義機率。
2.了解機率的基本觀念如隨機實驗，實驗結果，事件，樣本空間等。
3.描述古典的機率理論、客觀的機率理論及主觀的機率理論。
4.熟習聯合機率、邊際機率及條件機率的定義及其應用。
5.學習獨立、不獨立與互斥事件間的相互關係。
6.認識貝氏定理及應用貝氏定理。

含課本重點整理，惟仍應研讀課本之詳細內容

第5章 機率論

隨機實驗

- **隨機實驗的意義**

隨機實驗是一種過程(process)，是一種不能確定預知會發生何種結果的實驗方式。在實驗前已知所有可能出現的結果，而實驗後的結果為所有可能的結果之一，但實驗前並未能正確的、肯定的預知它是何種結果。隨機實驗可重複進行，而經過長期重複實驗，出現的結果會遵循某一些統計規則。

第5章 機率論

隨機實驗

- **隨機**

  隨機是指一個現象事先無法預知是否發生，但在長期多次重複實驗之後，該現象的發生會出現有規則的型態。

第5章 機率論

隨機實驗

- **基本出象**

  隨機實驗的每個可能的結果稱為基本出象，又稱為樣本點。

- **樣本空間**

  一個隨機實驗中，所有可能出象的集合稱為樣本空間。通常以英文大寫字母*S*表示之。

現代統計學 林惠玲 陳正倉 合著 雙葉書廊發行 2015

第5章 機率論

隨機實驗

- **事件**

  樣本空間的部份集合稱為事件。

- **簡單事件**

  事件只包含一個基本出象者稱為簡單事件。

- **複合事件**

  事件包含二個或二個以上基本出象者稱為複合事件。

第5章 機率論

隨機實驗

- **乘數定理**

  設一隨機實驗包含 k 個實驗 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ ，若每一實驗 E_i 有 n_i 種結果， $i=1,2,\cdots,k$ ，則該隨機實驗有 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ 種可能結果。

- **排列**

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

- **組合**

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1}{r!}$$

機率理論

- **古典的機率理論**

$$P(E)=\frac{1}{N}$$

- **客觀的機率理論**

$$P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(E)}{n}$$

式中：$n(E)$ 表示事件E出現的次數，n表隨機實驗的總次數。

- **主觀的機率理論**

$P(E)=$[對事件E發生的信心]

機率理論

- **大數法則**

若某事件有既定的機率，而我們不斷的進行相同的實驗，則該事件發生的次數比例會越來越接近這個既定的機率。

機率的公理

- **公理一**

  $0 \le P(E_i) \le 1$，表示任一事件E_i 若可能發生，則其機率大於0小於1。若事件不發生，則其機率等於0。若事件一定發生，則機率等於1。

- **公理二**

  $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$ ，

  $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 互斥，表示若有n個互斥事件$E_1, E_2, \cdots, E_n$ ，則E_1 發生或E_2 發生或E_n 發生的機率為其個別機率的和。

- **公理三**

  $P(S) = 1$ ，表示樣本空間中所有事件均發生的機率總合等於1。

事件機率

- **事件機率**

  設事件A定義於隨機實驗的樣本空間,其發生之機率$P(A)$為事件A之基本出象的機率總和，即$P(A) = \sum P(E_i)$ ， $E_i \in A$ 。

- **聯合機率**

  二個或二個以上事件同時發生的機率稱為聯合機率。

事件機率

- **邊際機率**

  在有二個或二個以上類別的樣本空間中，若僅考慮某一類別個別發生的機率者稱為邊際機率。

- **條件機率**

  令A、B為定義於樣本空間的事件，已知發生事件B之後再發生事件A的機率，稱為事件A的條件機率。

事件的性質與事件機率的運算

- **獨立事件**

  獨立事件係指一事件的發生不影響其他事件發生的機率。

- **兩事件獨立**

  若A、B兩事件合乎於下列任一條件，則A、B互為獨立。

  ① $P(A|B)=P(A)$ ② $P(B|A)=P(B)$ ③ $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

- **相依事件**

  相依事件係指一事件的發生影響其他事件發生的機率。

- **互斥事件**

  如果事件沒有共同的元素(樣本點)，則稱為互斥事件。

第5章 機率論

事件的性質與事件機率的運算

❍加法定理

兩事件的聯集

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

如果事件A與事件B互斥，則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

❍ 乘法定理

二事件的交集

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

如果A、B獨立($P(A \mid B) = P(A)$)，則

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

❍ 分割定理(條件機率的情形)

若$A_1, \cdots, A_r$為分割集合，B為一事件，則$P(B) = \sum_{i=1}^{r} P(B \cap A_i)$，

且由$P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$，故

$$P(B) = \sum_{i=1}^{r} P(B \cap A_i) == \sum_{i=1}^{r} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

第5章 機率論

5.2 若 A、B 是獨立事件，$P(A) = 0.6$，$P(B) = 0.3$，試求：

① $P(A \mid B)$ 與 $P(\overline{A} \mid B)$

② $P(A \cap B)$ 與 $P(A \cap \overline{B})$

③ $P(A \cup B)$ 與 $P(A \cup \overline{B})$

5.3 A、B 為互斥的兩事件，已知 $P(A) = 0.5$，$P(B) = 0.4$，計算：

① $P(A \cap B)$ 與 $P(A \cap \overline{B})$

② $P(A \cup B)$ 與 $P(A \cup \overline{B})$

③ $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

5.13 從台北市與高雄市抽樣 1,000 家企業，調查其對新稅制的意見，結果如下：

	贊成	反對	無意見
台北市	160	290	80
高雄市	140	210	120

①贊成與反對的企業各佔多少百分比？

②若任選一家企業，已知其贊成新稅制，則其位於高雄市的機率為何？

③若從台北市的企業中任選一家，則其反對新稅制的機率為何？