

例 17.4 大學生的國文程度（檢定母體是否為常態分配）

台灣學生的國文程度近些年來受到國人的關注，而教育部國文教學方針的搖擺不定同樣令人擔憂。因此，學界發起「搶救國文教育」運動，顯示對學生國文程度的憂心。為瞭解學生的國文程度，隨機抽取學生 1,083 人，得到國文

科成績人數分配表如表 17.6 所示。根據該表試檢定大學指考國文成績分配是否為常態分配（ $\alpha = 0.01$ ）？

分數	0~10	10~20	20~30	30~40	40~50
人數	5	39	133	245	290
分數	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100
人數	227	114	28	2	0

解 已知 $n = 1,083$ ， $\alpha = 0.05$ ，檢定步驟為：

① 設立兩個假設

H_0 ：國文成績為常態分配

H_1 ：國文成績不為常態分配

② 選擇檢定統計量

將常態分配根據其值域分成 10 個類別，可看成是一個多項實驗，因此以卡方分配來做檢定。

③ 決定拒絕域及接受域

$\alpha = 0.01$ ， $k = 10$ ，自由度為 $df = k - 1 - m = 10 - 1 - 2 = 7$ （其中 $m = 2$ ，是因為利用樣本資料估計兩個未知參數 μ 與 σ^2 ）。查卡方機率值表可得臨界值為 $\chi_{10-1-2,0.05}^2 = 14.067$ 。

④ 計算檢定統計量（或將檢定統計量與臨界值比較）

因常態分配的參數 μ 未知，故以 \bar{X} 估計之。利用上表可得：

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{10} f_i} = \frac{47,725}{1,083} = 44.07$$

另一參數 σ 亦未知，以 S 來估計。利用上表可得：

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{X})^2 f_i = \frac{216,310.41}{1,082} = 199.92$$

由此可得 $S = 14.14$ ，故：

$$P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10 - 44.07}{14.14}\right) = P(Z < -2.41) = 0.008$$

$$\begin{aligned} P(10 < X < 20) &= P\left(\frac{10 - 44.07}{14.14} < Z < \frac{20 - 44.07}{14.14}\right) \\ &= P(-2.41 < Z < -1.70) = 0.037 \end{aligned}$$

同理可求得另外 8 組的機率值如表 17.7 所示。

表 17.7 大學指考國文成績的觀察次數與理論次數

國文分數	人數 (O)	$Z = \frac{U - 44.07}{14.14}$	$Z = \frac{L - 44.07}{14.14}$	機率值 (p)	$E(np)$	$(O - E)^2$
0~10	5	-2.41	$-\infty$	0.008	8.7	13.69
10~20	39	-1.70	-2.41	0.037	40.1	1.21
20~30	133	-1.00	-1.70	0.114	123.5	90.25
30~40	245	-0.29	-1.00	0.227	245.8	0.64
40~50	290	0.42	-0.29	0.270	300.0	5.76
50~60	227	1.13	0.42	0.208	225.3	2.89
60~70	114	1.83	1.13	0.096	104.0	100
70~80	28	2.54	1.83	0.028	30.3	5.29
80~90	2	3.25	2.54	0.005	5.4	16.00
90~100	0	∞	3.25	0.0006	0.6	

附註： U ：各組上限， L ：各組下限。

由上知 $\bar{X} = 44.07$ ， $S = 14.14$ ，故可求各組上下限的 Z 值。結果如表 17.7 第 3 行、第 4 行。由各組的上下限 Z 值可求各組的機率如表第 5 行。第 6 行為期望次數即 $E = np$ 。第 7 行為觀察次數與期望次數差的平方。因為最後一組的理論次數小於 5，因此與倒數第二組合併計算，可得：

$$\chi^2 = \frac{13.69}{8.7} + \frac{1.21}{40.1} + \cdots + \frac{16.0}{6.0} = 6.18$$

⑤ 下結論

檢定統計量 $\chi^2 = 6.18$ 小於卡方臨界值 $\chi_{k-1, \alpha}^2 = \chi_{9-1-2, 0.05}^2 = 12.59$ ($k=9$ 是因最後兩組合併為一組的關係)。落在接受域，因此不拒絕虛無假設。故下結論說：「大學指考國文考試成績是常態分配」。