泊松分配和指數分配的關係

設 X 爲 λ 的泊松分配：

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2\cdots$$

若令 T 爲二事件發生的相隔時間，則 T 爲一指數分配：

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad t>0$$

關於泊松分配和指數分配的關係的數學證明請參見附錄

四. 泊松分配與指數分配的關係

由泊松分配的機率公式可知，事件每分鐘平均發生 λ 次。假設我們想知道兩件事相隔至少 t 分鐘的機率，那麼 t 分鐘內這種事件平均會發生 λt 次，那麼泊松分配爲：

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda t}\lambda t^{x}}{x!}$$

二事件相隔至少 t 分鐘之機率即爲 t 分鐘內不發生該事件的機率爲：

$$P(X=0)=e^{-\lambda t}$$

另外，就指數分配而言，我們假設二事件相隔 t 分鐘的機率密度函數爲 $f(t)$；則相隔至少 t 分鐘的機率爲：

$$P(T>t)=\int_{t}^{\infty} f(t)dt=1-\int_{0}^{t} f(t)dt$$

所以 t 分鐘內不發生事件的機率 $P(X=0)$，即爲二事件相隔至少 t 分鐘的機率 $P(T>t)$，因此

$$P(X=0)=e^{-\lambda t}=P(T>t)=1-\int_{0}^{t} f(t)dt$$

兩邊均對 t 微分可得：

$$-\lambda e^{-\lambda t}=-f(t)\ ,\ f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$