$$\bar{q} = 1 - 0.028 = 0.972$$

標準差的估計值為：

$$S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\overline{pq}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})} = \sqrt{(0.028)(0.972)(\frac{1}{500} + \frac{1}{500})} = 0.01044$$

檢定統計量為：

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{S_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} = \frac{(0.024 - 0.032) - 0}{0.01044} = -0.766$$

因為是兩尾檢定，P 值為：

$$P\text{ 值} = 2 \times P(Z < -0.766) = 2 \times 0.2206 = 0.4412$$

⑤下結論

因為 $Z = -0.766$ 大於臨界值 -1.96，落在接受域。或因 P值 $= 0.4412$ 大於 $\alpha = 0.05$，因此不拒絕虛無假設。即 2 個打字小姐錯字比率沒有差異。■■■

13.5 兩個母體變異數比的統計推論

兩母體變異數大小的比較可用 F 分配來做估計與檢定。

工廠生產產品時，經常必須比較多種生產方法或生產設備所生產的產品品質的穩定性。比如，黑松汽水公司要購買製汽水罐的機器，有多家製罐生產設備，黑松公司的採購條件是裝填容量平均數相同，容量的變異數要小。變異數小代表汽水罐的容量較穩定。反之，變異數大者，汽水罐的容量差異性大，不穩定，易遭顧客抱怨。此時黑松公司可以抽樣求取其平均數及變異數，並比較其結果，然後根據採購條件以決定採購的對象。像這種經常必須比較母體變異數的情形相當普遍，因此，本節介紹比較兩母體變異數的統計方法，以供未來實務的參考。

13.5.1 兩樣本變異數比的抽樣分配－F 分配

樣本變異數比的抽樣分配稱為 F 分配。

當我們要比較兩獨立常態母體變異數是否相等時，可利用樣本統計量之一的樣本變異數比（S_1^2 / S_2^2）來做比較及推論。例如要比較兩組工作人員的平均生產量的變異，此時必須求樣本變異數比的抽樣分配，才能進行比較。樣本變異數比的抽樣分配是將 S_1^2 / S_2^2 除以 σ_1^2 / σ_2^2 標準化為新的統計量，則該統

計量可證明爲一個以兩個自由度(n_1-1)與(n_2-1)的 F 分配。

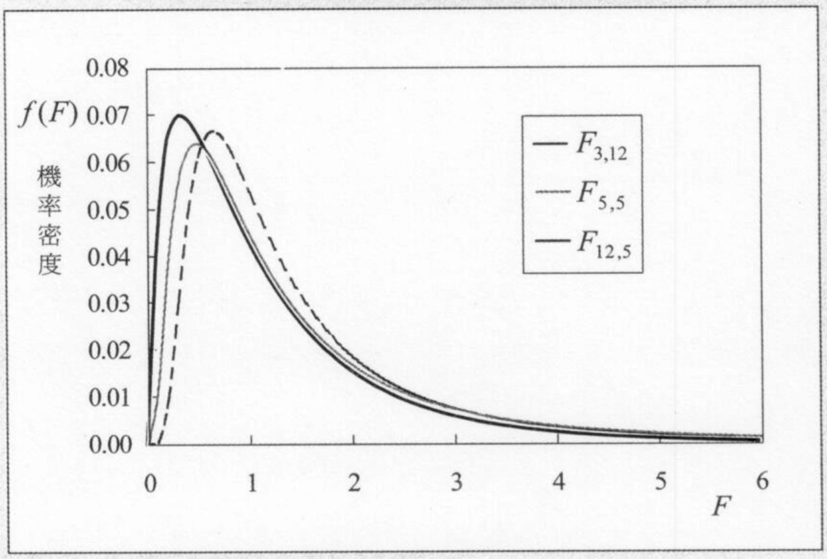
$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$ **的分配**

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1} \qquad (13.27)$$

F 分配的性質

① F 分配爲一右偏分配。F 分配決定於兩個自由度 ν_1，ν_2，不同的 ν_1，ν_2 有不同的 F 分配，如圖 13.4。

圖 13.4 自由度不同的 *F* 分配



② F 分配的平均數與變異數

$$E(F)=\frac{\nu_2}{\nu_2-2} \quad (\nu_2>2)\text{，}V(F)=\frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)} \quad (\nu_2>4)$$

③ F 分配的定理

設有兩個母體均爲常態分配，即 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且 X_1 與 X_2 互相獨立，自 X_1、X_2 中分別獨立隨機抽取 n_1，n_2 個樣本，令：

$$S_1^2=\frac{\sum(X_1-\overline{X}_1)^2}{n_1-1}\text{，}S_2^2=\frac{\sum(X_2-\overline{X}_2)^2}{n_2-1}$$

則：

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

④ F 分配的定理

$$F = \frac{\chi_{v_1}^2 / v_1}{\chi_{v_2}^2 / v_2} \sim F_{v_1,v_2}$$

⑤ $t_v^2 = F_{1,v}$

意即自由度 v 的 t 隨機變數的平方恰爲自由度 1 與 v 的 F 隨機變數。因：

$$t_v = \frac{Z}{\sqrt{\chi_v^2/v}}$$

故：

$$t_v^2 = \frac{Z^2}{\chi_v^2/v} = \frac{\chi_1^2/1}{\chi_2^2/v} \sim F_{1,v}$$

⑥ F 分配的倒數性質

F 的倒數仍爲一 F 分配，其自由度爲 v_2, v_1，即：

$$\frac{1}{F_{v_1,v_2}} \sim F_{v_2,v_1}$$

因：

$$\frac{1}{F_{v_1,v_2}} = \frac{\chi_{v_2}^2 / v_2}{\chi_{v_1}^2 / v_1} \sim F_{v_2,v_1}$$

表 13.13　F 分配表（α=0.05）

v_2/v_1	1	2	3	4	5	…	9	10	…	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	…	240.5	241.9	…	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	…	19.38	19.40	…	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	…	8.81	8.79	…	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	…	6.00	5.96	…	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	…	4.77	4.74	…	4.40	4.36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	…	⋮	⋮
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	…	3.02	2.98	…	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	…	2.90	2.85	…	2.45	2.40
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	…	⋮	⋮
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	…	1.88	1.83	…	1.22	1

⑦ F 分配的機率值表

常用的 F 分配的臨界值表請見附表之表七。表 13.13 爲其部份的複製。F 表中之 F 值表示自由度爲 v_1，v_2 的 F 分配右尾機率值爲 $\alpha = 0.05$ 的值，表爲 $F_{v_1,v_2,\alpha}$，即 $P(F_{v_1,v_2} > F_{v_1,v_2,\alpha}) = \alpha$。例如當 $v_1 = 5$，$v_2 = 10$，$\alpha = 0.05$，則 $F_{5,10,0.05} = 3.33$，意即 $P(F_{5,10} > 3.33) = 0.05$。又如 $v_1 = 10$，$v_2 = 5$，$\alpha = 0.05$，則 $F_{10,5,0.05} = 4.74$，即 $P(F_{10,5} > 4.74) = 0.05$，請特別注意 v_1，v_2 之順序，v_1 代表統計量分子的自由度，v_2 代表統計量分母的自由度，兩者順序反過來 F 分配即不同。F 表中無左尾機率爲 α 的 F 值，這是因爲左尾的 F 值可以利用 F 分配的倒數值求得，左尾機率爲 α 的 F 值表爲 $F_{v_1,v_2,1-\alpha}$。根據 F 分配的倒數性質求左尾 α 機率的 F 值爲：

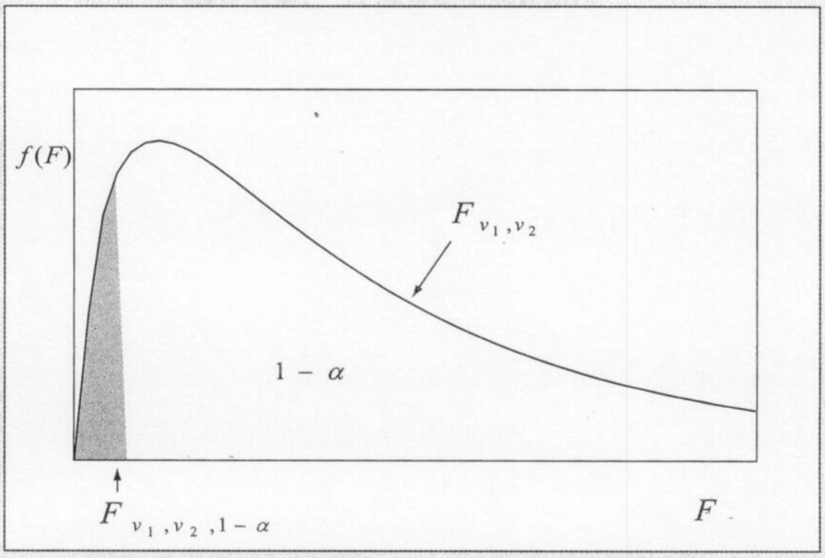
$$F_{v_1,v_2,1-\alpha} = \frac{1}{F_{v_2,v_1,\alpha}} \qquad (13.28)$$

例如要求 $F_{10,5,0.95}$ 之值，利用（13.28）公式：

$$F_{10,5,0.95} = \frac{1}{F_{5,10,0.05}} = \frac{1}{3.33} = 0.30$$

如圖 13.5。

圖 13.5　F 分配



Excel 的 F 分配的機率及 F 值

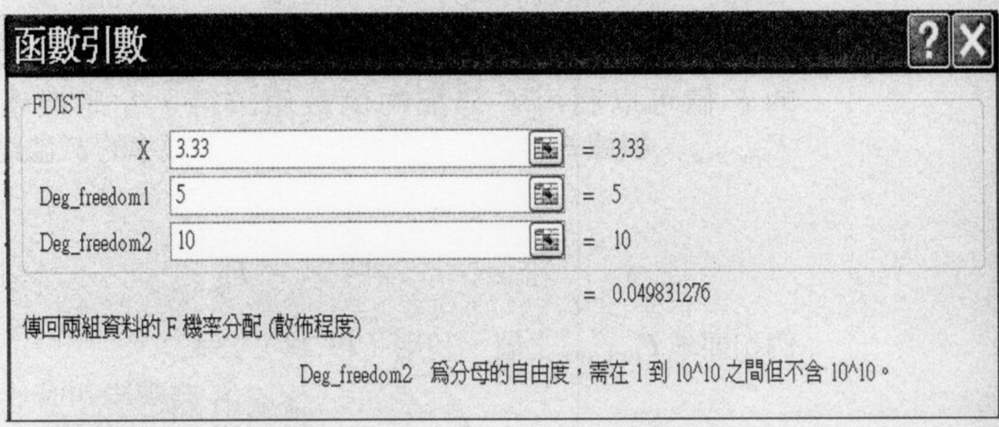
在求取 F 分配的機率時，可利用 Excel 的函數精靈 f_x 來進行。Excel 的 F 分配

的機率值為 $P(X > x)$，步驟如下：

1.選取「公式」、「f_x插入函數」、「統計」、「FDIST」、按確定。

2.在 X 空白方格輸入所要求算的 X 值，在 degrees_freedom1 空白方格輸入分子的自由度，在 degrees_freedom2 空白方格輸入分母的自由度，按確定，如圖 13.6。

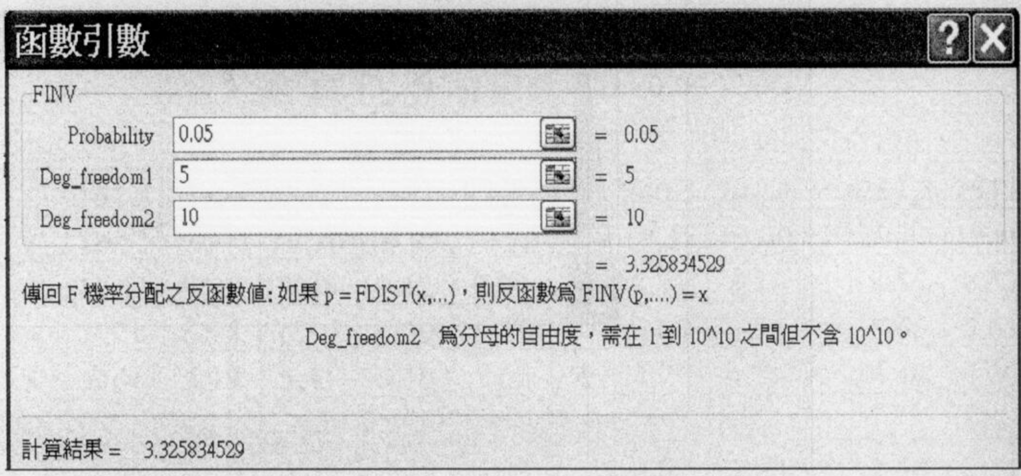
圖 13.6　*F* 分配對話方塊



3.結果出現機率 $0.004983 \approx 0.05$。此為，分子自由度 5，分母自由度 10，F 大於 $X = 3.33$ 的機率。

4.如果要求各個不同機率下的 F 值，選取「公式」「f_x插入函數」、「統計」、「FINV」。例如要求機率 0.05 的 F 值，操作如圖 13.7。

圖 13.7　*F* 值



13.5.2　兩母體變異數比的區間估計

當我們要比較母體變異數，比如σ_1^2與σ_2^2的大小時，可以比較兩者之比率，當$\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$時，表示兩者相等；當$\sigma_1^2/\sigma_2^2>1$時，表示$\sigma_1^2>\sigma_2^2$；當$\sigma_1^2/\sigma_2^2<1$時，表示$\sigma_1^2<\sigma_2^2$。因此，只要估計兩母體變異數比σ_1^2/σ_2^2，即可得知兩母體變異數的大小。

若要對母體變異數比做區間估計則必須假設二母體爲常態分配且獨立，其方法如下：

首先選擇S_1^2/S_2^2做爲σ_1^2/σ_2^2的點估計式。由於S_1^2/S_2^2爲σ_1^2/σ_2^2的一致性估計式，故以S_1^2/S_2^2做爲σ_1^2/σ_2^2的點估計式。由上一節知$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$的抽樣分配爲$F$分配：

F 分配

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1} \qquad (13.29)$$

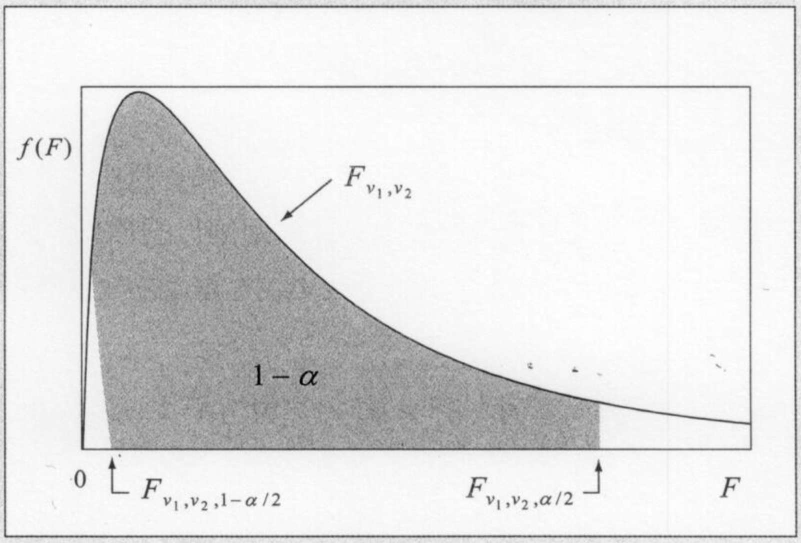
由此F分配我們可進行σ_1^2/σ_2^2的區間估計。

其次，根據F分配，（13.29）式的統計量$1-\alpha$的機率區間爲：

$$P(F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}\le F\le F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2})=1-\alpha$$

其中$F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}$爲左尾$\alpha/2$機率的$F$臨界值，$F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$爲右尾$\alpha/2$機率的$F$臨界值，如圖 13.8 所示。

圖 13.8 $(1-\alpha)F$的機率區間



將（13.29）式的 F 值代入上式可得：

$$P(F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} \le \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \le F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}) = 1-\alpha$$

上式可寫為：

$$P(F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} \le \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2} \le F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}) = 1-\alpha$$

以 S_2^2/S_1^2 乘以上式各項，再取倒數（取倒數後不等式左邊數值移到右邊，右邊移到左邊）。可得 σ_1^2/σ_2^2 的 $1-\alpha$ 的信賴區間為：

母體變異數比的信賴區間

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}} \quad (13.30)$$

（13.30）式的 $F_{n_1-1,n_2-2,1-\alpha/2}$ 無法查表，我們根據 F 分配的倒數性質可知：

$$F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha} = \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1,\alpha}}$$

求得：

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{n_2-1,n_1-1,\alpha/2} \quad (13.31)$$

（13.31）式的計算與查表較為容易。

13.5.3 兩母體變異數比的假設檢定

如果我們要檢定兩條生產線產品品質的差異，兩個公司服務品質的差異，兩個產品包裝的變異時，我們可利用兩母體變異數比的假設檢定方法。兩母體變異數比的檢定假設，仍分雙尾，左尾及右尾三種形式：

$$H_0:\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad H_0:\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \qquad H_0:\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$$
$$H_1:\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 \qquad H_1:\sigma_1^2 < \sigma_2^2 \qquad H_1:\sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

或：

個案研究 銷售獎金

大統百貨公司的專櫃爲激勵員工及改善服務態度，設有銷售獎勵制度。專櫃銷售員的獎金是依銷售額累進，每月銷售額在 50 至 100 萬者，發給銷售額 3%的獎金；銷售額在 100 至 200 萬的部份，獎金提高到 4.5%；超過 200 萬的部份，獎金爲 5%。實施此項新制度後，行銷主管宣稱專櫃的生意大有起色，每月達到 200 萬業績者不乏其人。對於此項說法，財務主管不表贊同，他認爲此項制度只不過使各銷售員相互合作，將原本分散的銷貨額集中於一人，使其領取高額累進獎金後大家再來均分。問財務主管的說法正確嗎？請估計 95%的信賴區間。

解 爲證實財務主管的說法，財務部門將銷售員分爲 2 組，每組各 13 人，以比較新制度實施前後銷售員銷貨額之變異情況。令 σ_1^2 爲舊制度銷售獎金的變異數，σ_2^2 爲新制度銷售獎金的變異數。

設由樣本資料得知：

$$\text{舊制：} n_1 = 13 \text{，} S_1^2 = 153\times10^6 \text{；新制：} n_2 = 13 \text{，} S_2^2 = 541\times10^6$$

信賴水準爲：$(1-\alpha)100\% = 95\%$，故 $\alpha = 0.05$。爲估計兩母體變異數，根據（13.31）式計算母體變異數比之信賴區間（信賴水準 95%）：

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{n_2-1,n_1-1,\alpha/2}$$

查 F 值表可知：

$$F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2} = F_{12,12,0.025} = 3.28$$

因此

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{n_2-1,n_1-1,\alpha/2}$$

$$\frac{153\times10^6}{541\times10^6}\cdot\frac{1}{3.28} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{153\times10^6}{541\times10^6}\cdot 3.28$$

於是可得變異數比的信賴區間爲：

$$0.086 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 0.928$$

由於 σ_1^2/σ_2^2 的 95% 的信賴區間小於1，故可推論新制度實施後，確實造成各銷貨員營業額大幅起伏（σ_2^2 相對 σ_1^2 較大）。

$$H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2=1 \qquad H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2\ge 1 \qquad H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2\le 1$$
$$H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2\ne 1 \qquad H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2< 1 \qquad H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2> 1$$

F 檢定統計量

$$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

若虛無假設爲真 $\sigma_1^2/\sigma_2^2=1$，即 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，則檢定量爲：

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \tag{13.32}$$

如果我們將變異數較大者視爲來自母體 1，則統計檢定量的值會大於 1。此時單尾檢定都是右尾檢定，如此可以免除查左尾 F 值的麻煩。其決策法則爲：

F 檢定的決策法則

①單尾檢定：若 F值 $> F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$，則拒絕虛無假設 H_0。

②雙尾檢定：若 F值 $> F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$，則拒絕虛無假設 H_0。

個案研究 友訊與智邦的投資風險是否相同？

友訊科技股份有限公司（2332）與智邦科技股份有限公司（2345）是台灣區域網路產品的重要廠商。友訊成立於民國 76 年 6 月。初期主要產品是網路卡，以自有品牌 D-LINK 行銷國內外。目前主要的產品是無限網路、寬頻網路產品及網路介面卡。智邦科立於民國 77 年 2 月，初期以代工爲主，目前主要的產品是網路交換器、無線網路產品、網際產品等。兩家公司不僅產品幾乎相同，並且資本額非常接近，規模相當。因此許多投資人經常將這兩家公司相提並論，認爲購買兩家公司的股票的風險應該不會有差異。

爲了證實這兩家公司股票的風險是否一樣，現蒐集了這兩家公司 2005 年 1 月至 2008 年 8 月共 44 個月之股價資料（除權、除息已經還原）。經過初步分析後，其股價的報酬率之敘

表 13.14 友訊、智邦之月股價分析（2005/1~2008/8）

公 司	平均數	標準差	樣本數
友訊	51.7023	19.0039	44
智邦	16.1568	3.3122	44