第8章　數學附錄

一　設 X, Y 為二元隨機變數，則

$$\underset{y}{E}\,\underset{x}{E}(X|Y)=E(X)$$

證明

$$\underset{y}{E}\,\underset{x}{E}(X|Y)=\underset{y}{E}\left[\sum_x x\cdot f(x|y)\right]=\sum_y\left[\sum_x x\cdot f(x|y)\right]\cdot f_y(y)$$

$$=\sum_x x\sum_y f(x|y)\cdot f_y(y)=\sum_x x\sum_y f(x,y)$$

$$=\sum xf_x(x)=E(X)$$

二　設 X, Y 為二元隨機變數，則

$$V(X)=\underset{y}{E}\left[V(X|Y)\right]+\underset{y}{V}\left[E(X|Y)\right]$$

證明

$$\underset{y}{E}\left[V(X|Y)\right]=\underset{y}{E}\left[\underset{x}{E}(X^2|Y)-\left[\underset{x}{E}(X|Y)\right]^2\right]=\underset{y}{E}\,\underset{x}{E}(X^2|Y)-\underset{y}{E}\left[\underset{x}{E}(X|Y)\right]^2$$

$$=E(X^2)-\underset{y}{E}\left[\underset{x}{E}(X|Y)\right]^2$$

$$=\left\{E(X^2)-\left[E(X)\right]^2\right\}-\left\{\underset{y}{E}\left[\underset{x}{E}(X|Y)\right]^2-\left[\underset{y}{E}\,\underset{x}{E}(X|Y)\right]^2\right\}$$

$$=V(X)-\underset{y}{V}\left[E(X|Y)\right]$$

因 $E(X)=\underset{y}{E}\,\underset{x}{E}(X|Y)$，$\underset{y}{V}(E(X|Y))=\underset{y}{E}\left[\underset{x}{E}(X|Y)\right]^2-\left[\underset{y}{E}\,\underset{x}{E}(X|Y)\right]^2$

因此得證。該定理指出條件變異數的平均數小於無條件變異數。

三　兩變數線性函數之平均數與變異數

設 X, Y 為二元之間斷隨機變數，其機率函數為 $f(x,y)$

令 $W=aX+bY$，則

$$E(W)=E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

$$V(W)=V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov(X,Y)$$

證明

(1)平均數

$$E(W)=E(aX+bY)$$

$$=\sum_x\sum_y(aX+bY)f(x,y)=\sum_x\sum_y axf(x,y)+\sum_x\sum_y byf(x,y)$$

$$=a\sum_x xf_x(x)+b\sum_y yf_y(y)=aE(X)+bE(Y)$$

(2)變異數

$$V(W)=V(aX+bY)$$

$$=E\left[(aX+bY)-E(aX+bY)\right]^2=E\left[a(X-E(X))+b(Y-E(Y))\right]^2$$

$$= E\left[a^2(X-E(X))^2 + b^2(Y-E(Y))^2 + 2ab(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$$
$$= a^2E(X-\mu_X)^2 + b^2E(Y-\mu_Y)^2 + 2abE(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$$
$$= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X,Y)$$

四 共變數的計算公式

$$Cov(X,Y) = E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) = E(XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X\mu_Y)$$
$$= E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(Y) + \mu_X\mu_Y = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

五 相關係數ρ_{XY}的值在(-1,+1)之間

證明 $\rho_{XY} = E\left(\dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X}\cdot\dfrac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$

$$= E(Z_X \cdot Z_Y) = E(Z_X - \mu_{Z_X})(Z_Y - \mu_{Z_Y}) = Cov(Z_X, Z_Y)$$

其中：$\begin{cases} Z_X = (X-\mu_X)/\sigma_X \\ Z_Y = (X-\mu_Y)/\sigma_Y \end{cases}$ $\begin{cases} E(Z_X) = 0 \\ E(Z_Y) = 0 \end{cases}$

而$V(Z_X - Z_Y) = V(Z_X) + V(Z_Y) - 2Cov(Z_X, Z_Y)$ ①

$V(Z_X + Z_Y) = V(Z_X) + V(Z_Y) + 2Cov(Z_X, Z_Y)$ ②

由①式可得：$V(Z_X - Z_Y) = 1 + 1 - 2Cov(Z_X, Z_Y) \geq 0$

$2Cov(Z_X, Z_Y) \leq 2$ ③

由②式可得：$V(Z_X + Z_Y) = 1 + 1 + 2Cov(Z_X, Z_Y) \geq 0$

$2Cov(Z_X, Z_Y) \geq -2$ ④

由③④可知：$-1 \leq Cov(Z_X, Z_Y) \leq 1$, 且 $\rho_{XY} = Cov(Z_X, Z_Y)$

故$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$