第7章　數學附錄

一　常態分配滿足機率密度函數的二個條件：

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

證明　令 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$，又令 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$，則 $X = \sigma Z + \mu$，且 $\frac{dx}{dZ} = \sigma$，

則 $I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}} dz_1 dz_2$

令 $r\sin q = Z_1$，　$r\cos q = Z_2$，

則 $I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} re^{-\frac{1}{2}r^2} d\theta dr = \int_0^{\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2} dr = 1$

因 $I > 0$，　$I^2 = 1$，故可得 $I = 1$。

二　常態分配的平均數與變異數

設 $f(x)$ 為常態分配，則 X 之平均數為 μ，變異數為 σ^2。

證明　常態分配之機率函數為：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

令 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$，故上式為：$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

(1)平均數

$$E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma E(Z) + \mu$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dZ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Ze^{-\frac{z^2}{2}} dZ \quad (V = -e^{-\frac{z^2}{2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d(-e^{-\frac{z^2}{2}}) \quad (\frac{dV}{dZ} = Ze^{-\frac{z^2}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-e^{-\frac{z^2}{2}}) \Big]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

所以 $E(X) = \sigma E(Z) + \mu = \mu$

(2)變異數

$$V(X) = V(\sigma Z + \mu) = \sigma^2 V(Z)$$

$$V(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \mu_z^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

（因 $d(e^{-\frac{z^2}{2}}) = e^{-\frac{z^2}{2}}(-z)dz$ ）

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-z)d(e^{-\frac{z^2}{2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-z)(e^{-\frac{z^2}{2}})\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\frac{z^2}{2}})dz$$

$$= 0 + 1 = 1$$

所以 $V(X) = \sigma^2 V(Z) = \sigma^2$

三 指數分配的平均數為 $1/\lambda$，變異數為 $1/\lambda^2$

證明 平均數

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^{\infty} xd(-e^{-\lambda x}) \qquad （令 v = -e^{-\lambda x}，\ \frac{dv}{dx} = \lambda e^{-\lambda x}）$$

$$= -xe^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

變異數

$$V(X) = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx - \left(\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx\right)^2$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} - \frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda}e^{-\lambda x} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$