第 13 章　數學附錄

一　證明 $E(MSF)=\sigma^2+\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}n_i(\mu_1-\mu_2)^2$

$E(MSE)=\sigma^2$

證明

$$E(MSF)=E[\frac{\sum n_i(\overline{Y}_i-\overline{Y})^2}{k-1}]=\frac{1}{k-1}E[\sum_{i=1}^{k}n_i\overline{Y}_i^2-n\overline{Y}^2]$$

$$=\frac{1}{k-1}[\sum_{i=1}^{k}n_iE(\overline{Y}_i)^2-nE(\overline{Y})^2]$$

$$=\frac{1}{k-1}[\sum_{i=1}^{k}n_i(\frac{\sigma^2}{n_i}+\mu_i^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)]$$

$$=\frac{1}{k-1}[\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2+\sum_{i=1}^{k}n_i\mu_i^2-\sigma^2-n\mu^2]$$

$$=\frac{1}{k-1}[k\sigma^2-\sigma^2+\sum_{i=1}^{k}n_i\mu_i^2-n\mu^2]=\sigma^2+\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}n_i(\mu_i-\mu)^2$$

$$E(MSE)=E[\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_i)^2}{\sum n_i-k}]=\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{1j}-\overline{Y}_1)^2+\Lambda+\sum_{j=1}^{nk}(Y_{kj}-\overline{Y}_k)^2}{\sum n_i-k}$$

$$=\frac{1}{\sum n_i-k}E[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)S_i^2]$$

其中 $S_i^2=\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}_i)^2}{n_i-1}$

$$=\frac{1}{\sum n_i-k}(\sum n_i-k)\sigma^2=\sigma^2$$

二　證明定理：在變異數分析的假設條件下，當 $H_0:\mu_i=\mu$ (μ_i 全等)成立時

$$\frac{MSF}{MSE}\sim F_{k-1,\Sigma n_i-k}$$

證明　先證明 $\frac{(k-1)MSF}{\sigma^2}\sim\chi_{k-1}^2$

$$\frac{(k-1)MSF}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{Y}_i-\overline{Y})^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{Y}_i-\overline{Y})^2}{\sigma^2}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i[(\overline{Y}_i-\mu_i)-(\overline{Y}-\mu_i)]^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i[(\overline{Y}_i-\mu_i)^2-(\overline{Y}-\mu)^2]^2}{\sigma^2}\text{(因 }\mu_i=\mu\text{)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\frac{\bar{Y}_i - \mu_i}{\sigma / \sqrt{n_i}})^2 - (\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}})^2 = \chi_k^2 - \chi_1^2$$

因 $\bar{Y}_i \sim N(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_i}), \bar{Y} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，故 $\sum_{i=1}^{k} (\frac{\bar{Y}_i - \mu_i}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}})^2 \sim \chi_k^2, (\frac{\bar{Y} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})^2 \sim \chi_1^2$

根據卡方分配加法定理可得 $\frac{(k-1)MSF}{\sigma^2} \sim \chi_{k-1}^2$ ①

再證明 $\frac{MSE(\sum n_i - k)}{\sigma^2} \sim \chi_{\sum n_i - k}^2$

$$\frac{MSE(\sum n_i - k)}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) S_i^2}{\sigma^2} \qquad (S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{n_i - 1})$$

$$= \frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma^2} + \Lambda + \frac{(n_K - 1) S_k^2}{\sigma^2}$$

$$= \chi_{n-1}^2 + \Lambda + \chi_{k-1}^2 = \chi_{\sum n_i - k}^2$$ ②

上述①②兩個卡方分配相除，可得 F 分配

$$\frac{(k-1)MSF / (k-1)\sigma^2}{(\sum n_i - k) MSE / \sigma^2 (\sum n_i - k)} \sim F_{k-1, \sum n_i - k} = \frac{MSF}{MSE}$$

三 一般聯合信賴區間法公式的來源

設有 k 個小母體，可求 $C_2^K = m$ 個聯合信賴區間，假設我們求得 m 個 $(1-\alpha)$ 之 $\mu_i - \mu_j$ 之聯合信賴區間表為 $I_1, I_2, ... I_m$，此 m 個聯合信賴區間的信賴係數為 $(1-\alpha)$，表為

$$P(I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_m) = 1 - \alpha$$ ①

根據機率的定理可知

$$P(I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_m) = 1 - P(\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \cup ... \cup \bar{I}_m)$$ ②

又根據機率加法定理知

$$P(\bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \cup ... \bar{I}_m) \le \sum_{i=1}^{m} P(\bar{I}_i)$$ ③

因此將③代入②可知

$$P(I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_m) \ge 1 - \sum_{i=1}^{m} P(\bar{I}_i)$$ ④

④式與①式比較可得 $1 - \sum_{i=1}^{m} P(\bar{I}_i) = 1 - \alpha$ 即 $\sum_{i=1}^{m} P(\bar{I}_i) = \alpha$，而

$\sum_{i=1}^{m} P(\bar{I}_i) = mP(\bar{I}_i)$，於是可得 $P(\bar{I}_i) = \alpha / m$，意即我們必須求 $1 - \frac{\alpha}{m}$ 之平均數差的單一信賴區間 $(I_1 ... I_m)$ 即可得 $(1-\alpha)$ 之 $\mu_i - \mu_j$ 之聯合信賴區間如下：

$$P(I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_m) \ge 1 - mP(\bar{I}_i)$$
$$= 1 - m \cdot \frac{\alpha}{m} = 1 - \alpha$$

其中 $I_1 ... I_m$ 分別為 $1-\frac{\alpha}{m}$ 之單一信賴區間。

由以上說明因此可得公式(14.17)，該公式指出利用 t 分配求 m 個 $1-\frac{\alpha}{m}$ 的均數差單一信賴區間，則可得 $(1-\alpha)$ 的 m 個母體均數差之聯合信賴區間。

四　証明 $MSE = S_p^2$

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1}(Y_{1j}-\bar{Y}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_{2j}-\bar{Y}_2)^2 + ...\sum_{j=1}^{n_k}(Y_{kj}-\bar{Y}_k)^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k}$$

$$= \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2 + ...(n_k-1)S_k^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i - k} \text{(因} S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\bar{Y}_i)^2}{n_i - 1}\text{)}$$

$$= S_p^2$$

五　檢定兩母體平均數是否相等，在常態分配、變異數未知但已知相等的假設條件下，可用 t 檢定(兩尾檢定)或 ANOVA 之 F 檢定(右尾檢定)，兩者完全相同。

亦即若檢定：$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \ne \mu_2 \end{cases}$

利用 t 檢定(兩尾檢定)如下：

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

利用變異數分析 F 檢定(採右尾檢定)

$$F = \frac{MSF}{MSE} = \frac{\sum n_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2 / 2-1}{\sum\sum(X_{ij}-\bar{X}_i)^2 / n_1+n_2-2} \sim F_{1,n_1+n_2-2}$$

我們能證明：

$$\frac{MSF}{MSE} = \left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right)^2 \text{，亦即 } t^2_{n_1+n_2-2} = F_{1,n_1+n_2-2}$$

證明　步驟 1：先證明

$$\sum_{i=1}^{2} n_i(\overline{X}_i - \overline{X})^2 = n_1(\overline{X}_1 - \overline{X})^2 + n_2(\overline{X}_2 - \overline{X})^2$$

$$= n_1(\overline{X}_1 - \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2})^2 + n_2(\overline{X}_2 - \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2})^2$$

$$= n_1(\frac{n_2\overline{X}_1 - n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2})^2 + n_2(\frac{n_1\overline{X}_2 - n_1\overline{X}_1}{n_1 + n_2})^2$$

$$= \frac{n_1 n_2^2 + n_2 n_1^2}{(n_1 + n_2)^2}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2 \qquad ①$$

步驟 2：由前面<四>可知：

$$MSE = \frac{\sum\sum(X_{ij} - \overline{X}_i)^2}{n_1 + n_2 - 2} = S_p^2 \qquad ②$$

步驟三將①②代入 $\frac{MSF}{MSE}$ 可得：

$$\frac{MSF}{MSE} = \frac{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2}{\sum\sum(X_{ij} - \overline{X}_i)^2 / n_1 + n_2 - 2} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2}{S_p^2\,\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} = \left(\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right)^2$$