八、三次拋物線與克羅梭曲線

參考資料：蔡攀鰲，「公路工程」

C.3　漸曲線

三次拋物線、克羅梭曲線

◎ 三次拋物線

※ 三次拋物線基本公式之差異

公式	作者	書名
$y=\dfrac{x^3}{6R_cL_c}$	蔡攀鰲	公路工程學
	尹鍾奇	實用平面測量學
	張經緯	測量學
	焦人希	工程測量
	金循洋、魏楷才	實用測量學
$y=\dfrac{x^3}{6R_cX_c}$	管晏如	測量學
	翁禮維	鐵路工程
	黃水木	路線測量與土石方計算
	王壽雄	路線測量與曲線佈設法

※Case I (蔡攀鰲「公路工程」)(圖九~15)

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_c}\bullet\frac{x}{L_c}$$

$$曲率K=\frac{1}{R}=\frac{y''}{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\because \left(y'\right)^2 \approx 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{R_cL_c}$$

$$y=\frac{x^3}{6R_cL_c}$$

$$if\ \ x=X_c \Rightarrow Y_c=\frac{{X_c}^3}{6R_cL_c}$$

$$i\approx \tan\ i\ =\frac{y}{x}=\frac{x^2}{6R_cL_c}=\frac{S}{3}$$

$$S\approx \tan\ S=\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2R_cL_c}$$

$$S_c=\frac{{X_c}^2}{2R_cL_c}\ ,\quad i_c=\frac{{X_c}^2}{6R_cL_c}=\frac{S_c}{3}$$

$$\frac{i}{i_c}=\frac{S}{S_c}=\left(\frac{x}{X_c}\right)^2 \Rightarrow i=i_c\left(\frac{x}{X_c}\right)^2$$

$$p=Y_c-R_c\left(1-\cos\ S_c\right)$$

$$q=X_c-R_c\sin\ S_c$$

※Case II (管晏如「測量學」)

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_c}\bullet\frac{x}{X_c}$$

$$曲率K=\frac{1}{R}=\frac{y''}{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\because\left(y'\right)^2\approx 0\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{R_cX_c}$$

$$y=\frac{x^3}{6R_cX_c}$$

$$if\ \ x=X_c\Rightarrow Y_c=\frac{{X_c}^2}{6R_c}$$

$$i\approx\tan\ i\ =\frac{y}{x}=\frac{x^2}{6R_cX_c}=\frac{S}{3}$$

$$S\approx\tan\ S=\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2R_cX_c}$$

$$S_c=\frac{X_c}{2R_c}\ ,\ \ i_c=\frac{X_c}{6R_c}=\frac{S_c}{3}$$

$$\frac{i}{i_c}=\frac{S}{S_c}=\left(\frac{x}{X_c}\right)^2\Rightarrow i=i_c\left(\frac{x}{X_c}\right)^2$$

$$p=Y_c-R_c\left(1-\cos\ S_c\right)$$

$$q=X_c-R_c\sin\ S_c$$

※Case III (尹鐘奇、蔡攀鰲)(圖九~15)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_c} \bullet \frac{L}{L_c}$$

忽略克羅梭曲線Y公式之第二項

==> 三次螺旋曲線

$$y = \frac{L^3}{6R_c L_c}$$

$$\frac{dy}{dL} = \sin S = \frac{L^2}{2R_c L_c}$$

$$\left(\frac{dx}{dL}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{dL}\right)^2 = 1 - \frac{L^4}{4\left(R_c L_c\right)^2}$$

$$x = \int dx = \int \left(1 - \frac{L^4}{4\left(R_c L_c\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} dL$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{2}\frac{L^4}{4\left(R_c L_c\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{L^4}{4\left(R_c L_c\right)^2}\right)^2 + \ldots\right) dL$$

$$= \mathrm{L} - \frac{L^5}{40\left(R_c L_c\right)^2} - \frac{L^9}{1152\left(R_c L_c\right)^4} + \ldots$$

$$\left(1+x\right)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$X = L_c - \frac{L_c{}^3}{40R_c{}^2}$$

$$Y = \frac{L_c{}^2}{6R_c}$$

$$i \approx \tan\ i\ = \frac{y}{x} \approx \frac{L^2}{6R_c L_c} = \frac{S}{3}$$

$$S \approx \sin\ S = \frac{dy}{dL} = \frac{L^2}{2R_c L_c}$$

$$S_c = \frac{L_c}{2R_c}\ ,\ \ i_c = \frac{L_c}{6R_c} = \frac{S_c}{3}$$

$$\frac{i}{i_c} = \frac{S}{S_c} = \left(\frac{L}{L_c}\right)^2 \Rightarrow i = i_c\left(\frac{L}{L_c}\right)^2$$

$$p = Y_c - R_c\left(1 - \cos\ S_c\right)$$

$$q = X_c - R_c \sin\ S_c$$

$$\mathrm{T_s} = \mathrm{q} + \left(\mathrm{R_c} + p\right)\tan\frac{\mathrm{I}}{2}$$

◎計算實例：(三次螺旋曲線)

V_d = 60 kph，I.P.交點之里程24^K+632.60，交角 Δ = 26^o, 假設採用R_c = 200 m，試求T.S., S.C., C.S., S.T.之里程及曲線各點之總偏角。

◎ 克羅梭曲線(圖九~27)

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_c}\bullet\frac{L}{L_c} \Rightarrow RL=A^2(\text{定値})$$

(曲率通徑A越大曲率增加越緩)

$$\text{曲率}K=\frac{1}{R}=\frac{d\tau}{dL}$$

$$dL=Rd\tau$$

$$dx=dL\cos\tau\ ,\quad dy=dL\sin\tau$$

$$dL=\frac{A^2}{L}d\tau$$

$$\text{積分得}\tau=\frac{L^2}{2A^2}=\frac{L}{2R}$$

$$L=A\sqrt{2\tau} \Rightarrow \mathrm{R}=\frac{A^2}{L}=\frac{L}{2\tau}=\frac{A}{\sqrt{2\tau}}$$

$$dL=\frac{A}{\sqrt{2\tau}}d\tau$$

$$dx=dL\cos\tau=\frac{A}{\sqrt{2\tau}}\cos\tau\, d\tau$$

$$dy=dL\sin\tau=\frac{A}{\sqrt{2\tau}}\sin\tau\, d\tau$$

$$X=\int dx=\frac{A}{\sqrt{2}}\int\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\ d\tau$$

$$Y=\int dy=\frac{A}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\ d\tau$$

$$\cos\tau = 1 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} - \frac{\tau^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin\tau = \tau - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^5}{5!} - \frac{\tau^7}{7!} + \ldots$$

$$X = \int dx = \frac{A}{\sqrt{2}} \int \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\ d\tau$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \int \left(\tau^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2!}\tau^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4!}\tau^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{6!}\tau^{\frac{11}{2}} + \ldots \right) d\tau$$

$$= \sqrt{2} A \tau^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{5 \cdot 2!}\tau^2 + \frac{1}{9 \cdot 4!}\tau^4 - \frac{1}{13 \cdot 6!}\tau^6 + \ldots \right)$$

$$= L\left\{ 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!}\tau^2 + \frac{1}{9 \cdot 4!}\tau^4 - \frac{1}{13 \cdot 6!}\tau^6 + \ \ldots \right\}$$

$$= L\left\{ 1 - \frac{L^2}{40R^2} + \frac{L^4}{3456R^4} - \ \ldots \right\}$$

$$Y = \int dy = \frac{A}{\sqrt{2}} \int \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\ d\tau$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \int \left(\tau^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3!}\tau^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{5!}\tau^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{7!}\tau^{\frac{13}{2}} + \ldots \right) d\tau$$

$$= \sqrt{2} A \tau^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!}\tau^2 + \frac{1}{11 \cdot 5!}\tau^4 - \frac{1}{15 \cdot 7!}\tau^6 + \ldots \right)$$

$$= L\tau\left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!}\tau^2 + \frac{1}{11 \cdot 5!}\tau^4 - \frac{1}{15 \cdot 7!}\tau^6 + \ \ldots \right\}$$

$$= \frac{L^2}{6\mathrm{R}}\left\{ 1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \ \ldots \right\}$$

其他相關公式:

$$A = \sqrt{RL}$$

$$L = 2R\tau$$

$$\Delta R = Y + R\cos\tau - R$$

$$X_m = X - R\sin\tau$$

(近似值: $X_m \approx \dfrac{L}{2}$ ， $\Delta \mathrm{R} \approx \dfrac{\mathrm{L}^2}{24R}$)

$$T_k = \frac{Y}{\sin\tau}$$

$$T_L = X - Y\cot\tau$$

$$\tan\sigma = \frac{Y}{X}$$

$$S_L = \frac{Y}{\sin\sigma}$$

$$T_1 = S_L\frac{\cos(\tau-\sigma)}{\cos\tau}$$

$$T = S_L\frac{\sin(\tau-\sigma)}{\sin\tau} + S_L\frac{\sin\sigma\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\tau\cos\frac{\Delta}{2}} + R\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}$$

$$\theta = \Delta - 2\tau$$

※組成型式：

基本型、反向型、蛋型、凸型、複合型

◎計算實例：

$V_d = 60$ kph, R = 300 m, $\Delta = 30^o$, 假設採用參數A = 100 m，試簡述克羅梭曲線上各點之敷設法。

(1)由I.P.交點各量切線長T得曲線起點與終點

(2)由X與Y長度量得克羅梭曲線與圓曲線交點(或由X、Y及T_L、T_K之長度求得)

(3)求得曲線通過之點(X_M, $\Delta R/2$)，以作校核之用

(4)利用支距法與偏角法測設曲線各點：

(a)支距法：選定$L_1, L_2, L_3, \ldots$得相對應之$R_1, R_2, R_3, \ldots$並將之代入X與Y之公式求得$x_1, x_2, x_3, \ldots$及$y_1, y_2, y_3, \ldots$。

(b)偏角法：如同支距法一樣求得x與y之座標，並利用S_L與$\tan\ \sigma$之公式求得各點之弦長與極角。

【例題】

一、三次拋物線與克螺梭曲線之比較。假設二漸曲線之定義為：

(a)三次拋物線： $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} * \frac{x}{X}$

(b)克螺梭曲線： $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} * \frac{\ell}{L}$

請您依此畫出各相關參數之示意簡圖並推導出下列公式：

(a)三次拋物線： $y = \frac{x^3}{6RX}$

(b)克螺梭曲線： $y = \frac{A}{\sqrt{2}}\int_0^{\tau} \frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau$ ， $x = \frac{A}{\sqrt{2}}\int_0^{\tau} \frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}} d\tau$

其中：

$r =$ 漸曲線上任一點之曲率半徑

$R =$ 圓曲線之曲率半徑

$x, y =$ 漸曲線上任一點之 x, y 座標

$X, Y =$ 漸曲線與單曲線連接處之 x, y 座標
$\ell =$ 漸曲線起點至漸曲線上任一點之曲線長
$\tau =$ 漸曲線上任一點之切線與 x 軸所成之切線角
$L =$ 漸曲線之曲線長
$A = \sqrt{RL}$ 克螺棱曲線參數。

二、擬在鄉村之一般丘陵地區設計一條二級快速公路，設計速率為80公里/小時，請依我國現行之公路路線設計規範：(若認為條件不夠時，請依規範自行作合理之假設)

(a) 假設當定線測量測至樁號50^k+000為交點，其交角(外偏角)I=40^o，方向為右，現擬採用圓曲線半徑R=400公尺，並於圓曲線兩端各設置克羅棱曲線(參數A=200公尺)，試求：(<u>**請將相關公式及計算過程以列表表示**</u>)

(1)T.S.、S.C.、C.S.、及S.T.之里程；及

(2)漸曲線與圓曲線前二個中心樁之偏角與曲線終點之總偏角。

(b) 假設與(a)相同之條件下，若將之改為三次螺旋曲線，試比較與上述相同問題之差異。

三、假設有一路段，其設計速率為50公里/小時，當定線測量測至樁號25^k+000為交點，其交角(外偏角)I=30^o，方向為右，現擬採用圓曲線半徑R=600公尺，並於圓曲線兩端各設置克螺棱曲線(參數A=200公尺)，試求：

(1)T.S.、S.C.、C.S.、及S.T.之里程，及

(2)此二漸曲線與圓曲線各中間樁之總偏角。(請注意：每一曲線僅需計算前二個中間樁之總偏角即可。)

四、假設擬在鄉村之平原區設計一條二級四車道分隔式快速公路，設計速率為90公里/小時，車道寬為3.75m，最大超高度假設為0.06，請以我國現行之公路路線設計規範為依據回答下列各問題(若認為條件不夠時，請依規範自行作合理之假設)。

當定線測量測至樁號50^k+000為交點，其交角(外偏角)I=25^o，方向為右，現擬採用圓曲線之曲度D=1.5^o (公制)，漸曲線長度為150公尺，並於圓曲線兩端各設置三次拋物線，試求：

(1)超高之標準值，(2)移距之值

(3)T.S.、S.C.、C.S.、及S.T.之里程；及

(4)此二漸曲線與圓曲線前二個中間樁(距5公尺與10公尺處)之偏角。

(5)請另以支距法決定圓曲線前述中間樁之位置。

(注意：<u>請將相關公式、計算過程、與計算結果以列表表示</u>。)