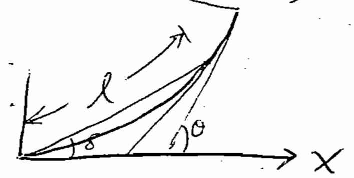
C.3 漸曲線

A、克婁梭(clothoid)曲線(螺形線 spiral)　　見 平面測量學 尹鍾奇 (p434-438)



曲率 $\dfrac{1}{r} = \dfrac{d\theta}{dl}$

$$\frac{1}{r} = \frac{1\,l}{RL}$$

$$\rho = \frac{1}{R} = K \times L \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{L}{A^2} \Rightarrow R \times L = A^2 \qquad rl = A^2$$

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{r} = \frac{l}{RL} \qquad \int d\theta = \int \frac{1}{r}\,dl \Rightarrow \theta = \frac{l^2}{2RL}$$

$$\theta = \frac{l^2}{2RL}$$

當 $l = L$ 時 $\theta = \dfrac{L}{2R}$　(公式 P-73)

$$dx = dl \cdot \cos\theta$$
$$dy = dl\,\sin\theta$$
$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$dx = dl\,\cos\theta \qquad dl = \frac{LR}{l}\,d\theta$$
$$= \frac{RL}{l}\,d\theta \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$\Longrightarrow X = \sqrt{2RL}\left(\theta^{1/2} - \frac{\theta^{5/2}}{5 \cdot 2!} + \cdots\right)$$

9·10 漸曲線

車輛進入一圓弧曲線前須有一漸變區間，使車輛能逐漸變更方向及達成離心力的變化。此項漸變區隨速率、曲率半徑、超高度及駕駛人之動作而異。再者於彎道地方，因欲抵抗行駛中車輛所產生之離心力，常將彎道之外側提高而使內側降低的形式，而在直線部份因排水的關係，其路面橫斷面呈中心高兩側低之路拱；又因安全關係，在彎道部份的路面常較直線段寬。爲了達成上述所須，常於切線與曲線交接部份加一漸變區使逐漸完成所須之全超高度及加寬度，此漸變區所設的曲線稱爲漸曲線亦稱緩和曲線或介曲線）。漸曲線之種類有三次拋物線、双紐線及克羅梭曲線（螺旋曲線）。

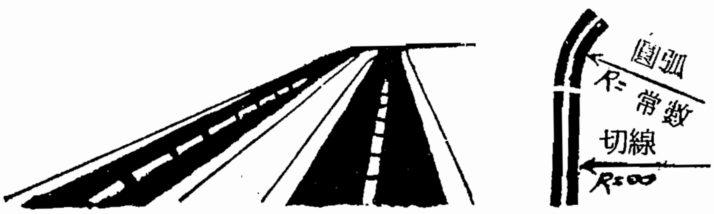
9·10－1 採用漸曲線之主要優點

(1)適宜的漸曲線爲駕駛人最易遵循之天然行徑，使車輛進出於圓曲線時，離心力能逐漸增減，因此不致侵及相鄰之車道，可保持一定之速率及增加行車安全。

(2)漸曲線可作爲超高漸變之區間，超高度可沿漸曲線逐漸變化，使與行車之速率及半徑相配合。如無漸曲線之設置，則超高度須一部份設在直線段，另一部份設置在曲線上，因此駕駛人駛近曲線時，車輪轉彎之方向須與前面曲線之方向相反，俾車輛在超高之直線路段上，仍能沿直線方向行駛，此爲一稱不自然的動作，因之多數車輛都有向曲線內側行駛之趨勢。

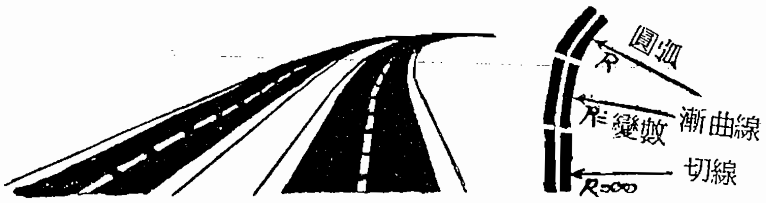
(3)採用漸曲線，可使彎道地方之加寬度由直線部份逐漸加寬至與曲線相接處達到全加寬。若遇半徑較小之曲線，可將部份加寬於曲線外側，而不使外緣形成反向曲線。

(4)可增公路之美觀，如圖九～14A示直線段與圓弧曲線直接相接，線形有突變之感。在直線段與圓弧曲線加入一段漸曲線，則其線甚爲平順自然，如圖九～14B所示者。



切線與圓弧

圖九～14A　切線與圓弧



切線與漸曲線

圖九～14 B　切線與漸曲線

9·10－2　漸曲線之長度

由物理學知，離心力 $F=ma=m\frac{v^2}{R}$，即車輛行經圓曲線上之離心加速度爲 $a=\frac{v^2}{R}$，若漸曲線之最短長度爲 L_c（公尺），車輛之速率爲v（公尺/秒），則此離心加速度需於此段距離 L_c 內，或於 $t=\frac{L_c}{v}$ 秒內，自零漸加至 $\frac{v^2}{R}$，因之離心加速度之變化率爲：

$$P=\frac{v^2}{R}\div\frac{L_c}{v}=\frac{v^3}{L_cR}$$

變化率P值爲0.61公尺/秒³時，車輛行駛舒適且安全。

$$0.61=\frac{V^3}{RL_c}\times\left(\frac{1000}{3600}\right)^3$$

$$\therefore\quad L_c=0.035\frac{V^3}{R}\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim34)$$

式中V之單位爲公里／小時，L_c之單位爲公尺。晚近已將該公式加以修正而考慮超高度的影響，其式如下：

$$L_c=\frac{0.0215V}{P}\left(\frac{V^2}{R}-127e\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim35)$$

式中 e＝超高度（公尺／公尺），當 e＝0時，式(9～35)與式(9～34)相同（P＝0.61公尺/秒³），由上式知超高度增加時，L_c 值相對地減少，式(9～35)中之P值曾建議採用0.4公尺/秒³。表九～13按 e＝0.1 由式(9～34)及(9～35)所求得之漸曲線最短長度（公尺）。

表九～13　漸曲線之最短長度（公尺）

計算用之公式	P 值	設計速率（公里／小時）				
		40	60	80	100	120
式（10～34）	0.6	46	65	87	102	119
式（10～35）	0.4	41	56	77	85	97

漸曲線長度亦可按超高漸變所需之長度決定之，參閱本章9·12節「超高漸變與其舖設法」。

9·10－3　三次拋物線型漸曲線

在直線與曲線之間，需設置漸曲線，使車輛由行駛之直線方向漸轉入曲線，漸曲線以往使用三次拋物線，其長一半在直線內，一半在曲線內，如圖九～15，其式如下：

$$y=\frac{x^3}{6R_cL_c} \quad \cdots\cdots (9\sim36)$$

式中：x＝漸曲線上任一點P至切線與漸曲線連接處之距離（公尺）。

y＝漸曲線上任一點P至切線延長線之垂直距離（公尺）。

R_c＝圓曲線之曲率半徑（公尺）。

L_c＝漸曲線長度（公尺）。

三次拋物線之相關公式如下：

$$R=\frac{R_cL_c}{L} \quad \cdots\cdots (9\sim37)$$

$$D=\frac{D_cL}{L_c} \quad \cdots\cdots (9\sim38)$$

$$S=\frac{L^2}{2R_cL_c}\times 57°\cdot 29578 \quad \cdots\cdots (9\sim39)$$

$$S_c=\frac{L_c}{2R_c}\times 57°\cdot 29578 \quad \cdots\cdots (9\sim40)$$

$$Y=\frac{L_c^2}{6R_c}=4p \quad \cdots\cdots (9\sim41)$$

$X : L_c - \frac{L_c^3}{40R_c^2}$

$$X = L_c - \frac{L_c^3}{40R_c^2} \quad \cdots\cdots (9\sim42)$$

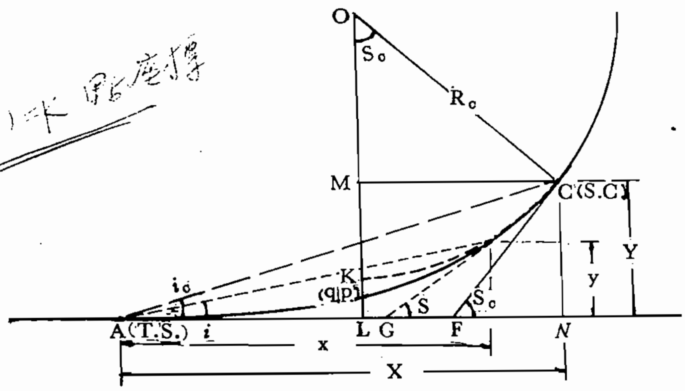
$$p = Y - R_c \text{Vers } S_c \quad \cdots\cdots (9\sim43)$$

$$q = X - R_c \text{Sin } S_c \quad \cdots\cdots (9\sim44)$$

$$i = \frac{L^2}{6R_c L_c} = \frac{S}{3} \quad \cdots\cdots (9\sim45)$$

$$i_c = \frac{S_c}{3} \quad \cdots\cdots (9\sim46)$$

(E.P)=K 切座標



圖九～15　三次拋物漸曲線

$$i = i_c \left(\frac{L}{L_c}\right)^2 \quad \cdots\cdots (9\sim47)$$

若圓弧曲線之兩端接對稱之漸曲線如圖九～16，其切線長為：

$$T_s = q + (R_c + p)\tan\frac{I}{2} \quad \cdots\cdots (9\sim48)$$

若圓弧曲線之兩端接不對稱之漸曲線時，於圖九～16中設$Lk = P_l$，BD $= P_s$

則 $$AV = q_l + (R_c + P_s)\tan\frac{I}{2} - \frac{P_l - P_s}{\tan I} \quad \cdots\cdots (9\sim49)$$

$$CV = q_s + (R_c + P_s)\tan\frac{I}{2} + \frac{P_l - P_s}{\tan I} \quad \cdots\cdots (9\sim50)$$

式中：R＝漸曲線上任一點之半徑。

R_c＝單曲線之曲率半徑。

D＝漸曲線上任一點之曲度。

D_c＝單曲線之曲度。

S＝自 T.S. 到漸曲線上任一點之漸曲線角。

S_c＝自 T.S. 至 S.C. 之漸曲線角。

i＝在 T.S. 對漸曲線上任一點之總偏角。

i_c＝在 T.S. 對 S.C. 之總偏角。

x＝漸曲線上任一點之橫距。

Z＝S.C. 之切線橫距。

Q＝單曲線以起點（即 k 點）之切線橫距。

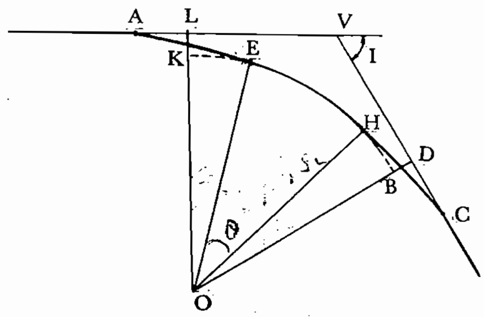
y＝漸曲線上任一點之切線支距。

Y＝S.C. 切線支距。

P＝單曲線起點之切線支距。

T_s＝切線長。

L＝由漸曲線起點至漸曲線上任一點之漸曲線長。



圖九～16　單曲線兩端接對稱之漸曲線

例題九～1　設有一路段，規定在彎道上行車速率為60公里／小時，當定線測量測至樁號$24^K+632.60$為交點，其交角為 26°，方向為右，現擬採用曲率半徑為 200 公尺，試求 T.S.、S.C.、C.S.及 S.T. 之里程及漸曲線上各中間樁之總偏角。

解：

由式（9～34）求漸曲線長

$$L_c = 0.035\frac{V^3}{R_c} = 0.035 \times \frac{60^3}{200} = 37.8 \text{公尺，採用} L_c = 40 \text{公尺}$$

由式（9～40）得

$$S_c=\frac{L_c}{2R_c}\times 57°\cdot 29578=\frac{40}{2\times 200}\times 57°\cdot 29578=5°43'48''$$

由式（9～42）得

$$X=L_c-\frac{L_c^3}{40R_c^2}=40-\frac{40^3}{40\times 200^2}=39.96\text{ 公尺}$$

由式（9～41）得

$$Y=\frac{L_c^2}{6R_c}=\frac{40^2}{6\times 200}=1.33\text{ 公尺}$$

由式（9～44）得

$$q=X-R_c\sin S_c=39.96-200\times\sin 5°43'48''=19.99\text{ 公尺}$$

由式（9～43）得

$$R=Y-R_c\text{Vers}S_c=1.33-200\text{Vers}5°43'48''=0.33\text{ 公尺}$$

由式（9～48）得

$$T_s=q+(R_c+R)\tan\frac{I}{2}=19.99+(200+0.33)$$

$$\times\tan\frac{26°}{2}=66.24\text{ 公尺}$$

單曲線之夾角 $\theta=I-2S_c=26°-2\times 5°43'48''=14°32'24''$

單曲線長 $=\frac{\pi R_c}{180}\theta=\frac{3.14\times 200}{180}\times 14°32'24''=50.73$ 公尺

(a) T.S.、S.C.、C.S.及S.T.之里程

I.P. 之里程＝	$24^K+632.60$
$-T_s$＝	66.24
T.S.點之里程＝	$24^K+566.36$
$+L_c$＝	40.00
S.C.點之里程＝	$24^K+606.36$
$+L_c$＝	50.73
C.S.點之里程＝	$24^K+657.36$
$+L_c$＝	40.00
S.T.點之里程＝	$24^K+697.09$

(b) 漸曲線上各中間樁之總偏角

因漸曲線之半徑與長度成反比，故設置中間樁時，須用短弦，使樁位較密而能顯示線形的變化，通常：

1. 漸曲線之總長等於或小於20公尺者，用5公尺之短弦。

2. 漸曲線之總長大於20公尺者，在漸曲線半徑大於300公尺以上者用10公尺短弦，以下者改用5公尺之短弦。

由上所述，漸曲線之半徑等於300公尺時之長度可由公式（9～37）求得之：

$$L=\frac{R_cL_c}{R}=\frac{200\times 40}{300}=26.67\text{ 公尺}$$

故第一漸曲線上所有10公尺之短弦僅可用至24^K+590爲止，以下者用5公尺之短弦。

由式（9～46）得

$$i_c=\frac{S_c}{3}=\frac{5°43'48''}{3}=1°54'36''$$

各中間樁之總偏角由式（9～47）計得如下表：

里　　程	說明	總　　偏　　角	附　　註
$24^k+566.36$	T.S.	$i=0°0'0''$	X＝39.96公尺
$+570.00$		$i=(\frac{L}{L_c})^2 i_c=(\frac{3.64}{40})^2\times 1°54'36''=0°10'27''$	y＝1.33公尺 q＝19.99公尺
$+580.00$		$i=(\frac{13.64}{40})^2\times 1°54'36''=0°13'20''$	P＝0.33公尺
$+590.00$		$i=(\frac{23.64}{40})^2\times 1°54'36''=0°40'07''$	Ts＝66.24公尺 TsX＝26.28公尺
$+595.00$		$i=(\frac{28.64}{40})^2\times 1°54'36''=0°58'24'$	l_c＝50.73公尺
$+600.00$		$i=(\frac{33.64}{40})^2\times 1°54'36''=1°21'13''$	Rc＝200公尺 I＝26°右
$24^k+606.36$	S.C.	$i=(\frac{40}{40})^2\times 1°54'36''=1°54'36''$	$I-2S_c=14°32'24''$

24 +606.36	S.C.	0°0′0″	$S_c = 5°43′48″$
+610.00		0°31′17″	I.P. = 24^k+632.60
+620.00		1°57′14″	Lc = 40公尺
+630.00		3°23′10″	
+640.00		4°49′8″	
+650.00		6°15′5″	
24^k+657.09	C.S.	7°22′48″	
24^k+657.09	C.S.	$i = (\frac{40}{40})^2 \times 1°54'36'' = 1°54'36''$	
+660.00		$i = (\frac{37.09}{40})^2 \times 1°54'36'' = 1°38'31''$	
+665.00		$i = (\frac{32.09}{40})^2 \times 1°54'36'' = 1°13'47''$	
+670.00		$i = (\frac{27.09}{40})^2 \times 1°54'36'' = 0°52'35''$	
+680.00		$i = (\frac{17.09}{40})^2 \times 1°54'36'' = 0°20'50''$	
+690.00		$i = (\frac{7.09}{40})^2 \times 1°54'36'' = 0°03'33''$	
+697.09	S.T.	$i = 0°0'00''$	

(c) 若按支距法設置各中間樁時由式（9～36）計得各值如下：

當 $x_0 = 0$ 公尺 T.S. $y_0 = 0$ 公尺

$x_1 = 3.64$ 〃 $y_1 = 0.001$ 〃

$x_2 = 13.64$ 〃 $y_2 = 0.053$ 〃

$x_3 = 23.64$ 〃 $y_3 = 0.275$ 〃

$x_4 = 28.64$ 〃 $y_4 = 0.489$ 〃

$x_5 = 33.64$ 〃 $y_5 = 0.793$ 〃

$x_6 = 40.00$ 〃 S.C. $y_6 = 1.333$ 〃

9·10－5　螺旋漸曲線（克羅梭曲線）

螺旋漸曲線亦稱克羅梭曲線其在數學上的特點爲曲率半徑與曲線長成反比，亦即於與切線之交點處，半徑自無窮大，漸次隨曲線之增長而減小，然其減小值較三次拋物線爲慢，故與雙紐線同樣適合於車輛之轉向。近來高速公路已普通採用克羅梭曲線之一部份作爲直線與圓曲線間之漸曲線，甚至採用克羅梭曲線代替圓弧曲線。

克羅梭曲線既然是曲率半徑與曲線長成反比，若設R＝曲線上某點之曲率半徑，L＝自曲線開始起至某點之曲線長，則克羅梭曲線之基本式爲：

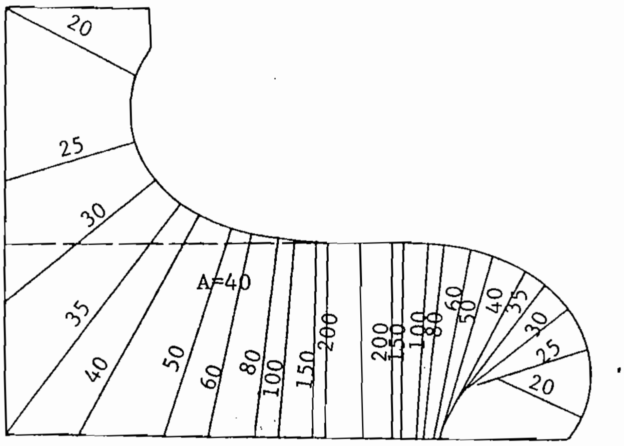
$$RL=A^2 \qquad (9\sim69)$$

式中A＝克羅梭曲線參數。若A值愈大，曲率之增加愈緩慢，適於快速行車；若A值愈小，則曲率之增加愈急，適用於設計標準較低之公路。表九～14爲在各種設計車輛速率下所擬採用之最小參數。

表九～14　各種設計速率之最小參數

設計速率（公里／小時）	30	40	50	60	80	100
最小參數（公尺）	30	50	70	100	200	300

圖九～20示一組克羅梭曲線板定規：

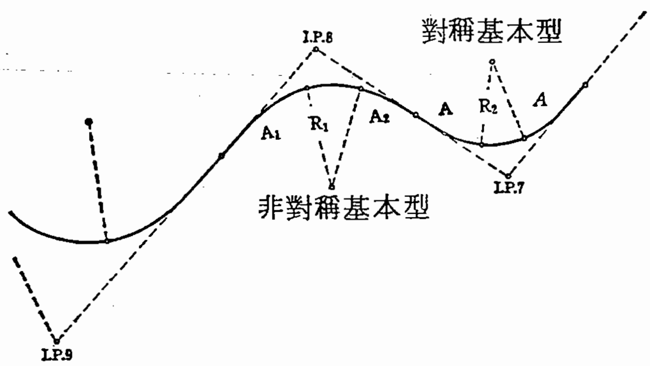


圖九～20　克羅梭曲線板定規

甲、克羅梭曲線的組成型式

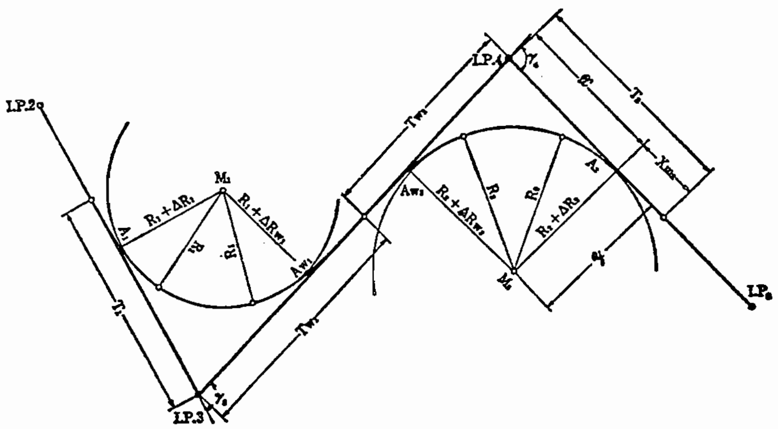
克羅梭曲線可按不同型態與直線及圓弧曲線組成不同型式，一般分爲五大類：

1. 基本型——以克羅梭曲線作爲漸曲線用，位於直線與圓弧曲線間如圖九～21所示，若圓弧曲線兩端之克羅梭曲線參數$A_1=A_2$則稱爲對稱基本型，$A_1\neq A_2$則稱爲非對稱基本型。在地形變化較大，線形受到限制的情況下可採用非對稱基本型。選用基本型克羅梭曲線，其參數以能在$\frac{1}{2}$R以上爲佳，但不應低於$\frac{1}{3}$R。



圖九～21 基本型克羅梭曲線

2. 反向型（S 型）——在兩反向之圓弧曲線間連接兩克羅梭曲線所組成者，如圖九～22所示。此型式曲線之參數值A_1與A_2可不相同，但Aw_1：Aw_2 以小於1.5 爲佳；若能採用相同的參數值，即 $Aw_1 = Aw_2$ 則最爲理想，在該情況下更能使行車平穩。兩克羅梭曲線間不宜接切線，不得已時切線長以不大於（$Aw_1 + Aw_2$）／140 。



圖九～22 反向型克羅梭曲線

3. 蛋型—— 在兩同向之圓弧曲線間連接一克羅梭曲線所組成者，如圖九～23所示，此型大多在受地形限制時始採用之，設計時應注意：

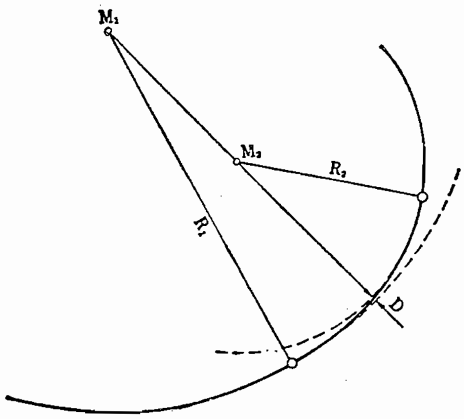
(1)若僅使用一克羅梭曲線時，大圓弧曲線必須包圍小圓弧曲線。

(2)克羅梭曲線之起點在大圓弧曲線上，曲率同爲$\frac{1}{R_1}$，而終點則在小圓

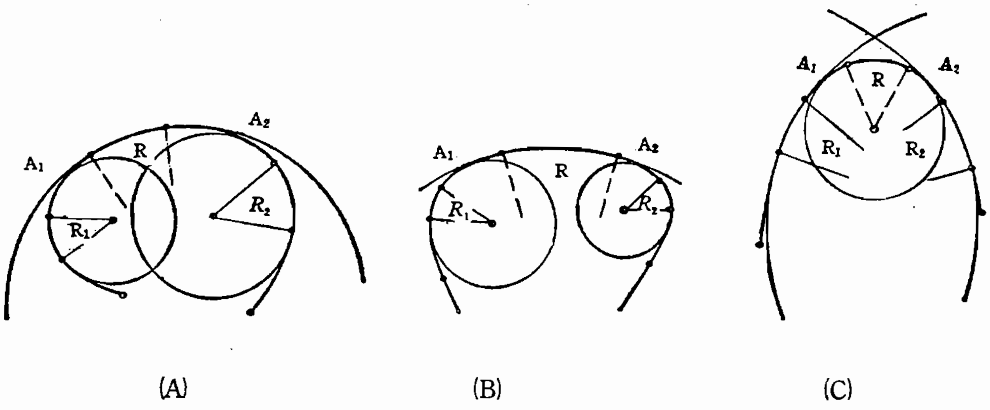
弧曲線上，曲率同爲$\frac{1}{R_2}$。

(3)爲使獲得線形的調和，兩圓弧曲線半徑，或與間距D的關係須滿足$R_2/R_1=0.2\sim0.8$，$D/R_1=0.003\sim0.03$。

(4)若兩圓弧相交或相離，則兩圓弧不能以一克羅梭曲線連接，而應另以適當的補助圓並用兩克羅梭曲線連成兩個蛋型曲線以改良其線形，如圖九～24所示。



圖九～23　蛋型克羅梭曲線



圖九～24　蛋型克羅梭曲線之改良型

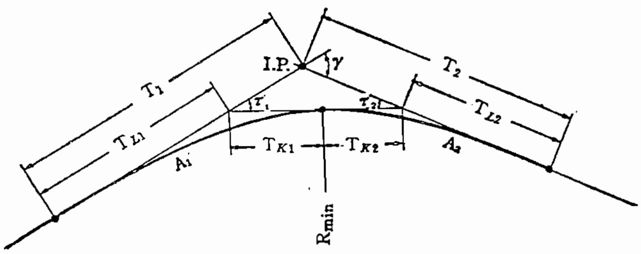
4. 凸型——兩克羅梭曲線在曲率相同之點互相連接，也即以兩克羅梭曲線代替圓弧曲線，免除中間的一段圓弧曲線，如圖九～25所示。若相連接的兩克羅梭曲率參數值$A_1=A_2$，則稱爲對稱型，若$A_1\neq A_2$則稱爲非對稱型。由

於整體線形有突變之感，且車輛行經兩曲線相交處會有方向突變，因此凸型克羅梭曲線採用較少，多在市區街道，或受地形限制之處而能採用最小曲率半徑，最小參數時用之。凸型克羅梭曲線設計原則：

(1)儘量採用最大的曲率半徑。

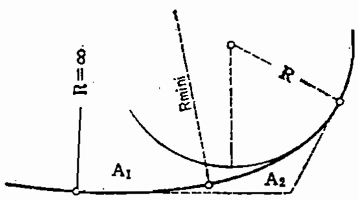
(2)對稱型之參數範圍 $R/3 \leq A \leq R$。

(3)非對稱型之參數範圍 $R/4 \leq A_2 \leq 0.8R$，$A_1 \leq 1.5A_2$。



圖九～25　凸型克羅梭曲線

5. 複合型——兩同向不同參數值之克羅梭曲線在曲率相等點連接而成者如圖九～26所示。由於兩曲線在連接處參數值突變，影響改變行車速率，故甚少採用，通常用在交流道、半徑較小的迴頭彎，或圈道型的匝道。



圖九～26　複合型克羅梭曲線

乙、克羅梭曲線基本式

舖設克羅梭曲線時有關各值之公式如下：

參閱圖九～27

$$X=\frac{A}{\sqrt{2}}\int_0^{\tau}\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$$

$$=\sqrt{2}A\tau^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{10}\tau^{2}+\frac{1}{216}\tau^{4}-\frac{1}{9360}\tau^{6}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n}}{(2n)!\,(4n+1)}\tau^{2n}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=L\left(1-\frac{L^{2}}{40R^{2}}+\frac{L^{4}}{3456R^{4}}-\frac{L^{6}}{599040R^{6}}+\cdots\cdots\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim70)$$

$$Y=\frac{A}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\tau}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}A\tau\left(1-\frac{1}{14}\tau^{2}+\frac{1}{440}\tau^{4}-\frac{1}{2520}\tau^{6}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n}3}{(2n+1)!\,(4n+3)}\tau^{2n}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{L^{2}}{6R}\left(1-\frac{L^{2}}{56R^{2}}+\frac{L^{4}}{7040R^{4}}-\frac{L^{6}}{1612800R^{6}}+\cdots\cdots\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim71)$$

由式（9～69）

$$A=\sqrt{RL}\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim72)$$

$$L=2R\tau\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim73)$$

$$\triangle R=Y+R\cos\tau-R\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim74)$$

$$Xm=X-R\sin\tau\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim75)$$

$$T_{K}=\frac{y}{\sin\tau}\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim76)$$

$$T_{L}=X-Y\cot\tau\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim77)$$

$$S_{L}=\frac{y}{\sin\sigma}\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim78)$$

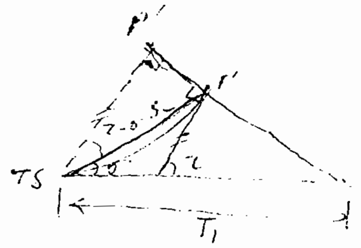
$$\tan\sigma=\frac{y}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim79)$$

切線長（由交點至克羅梭曲線始點之長度）

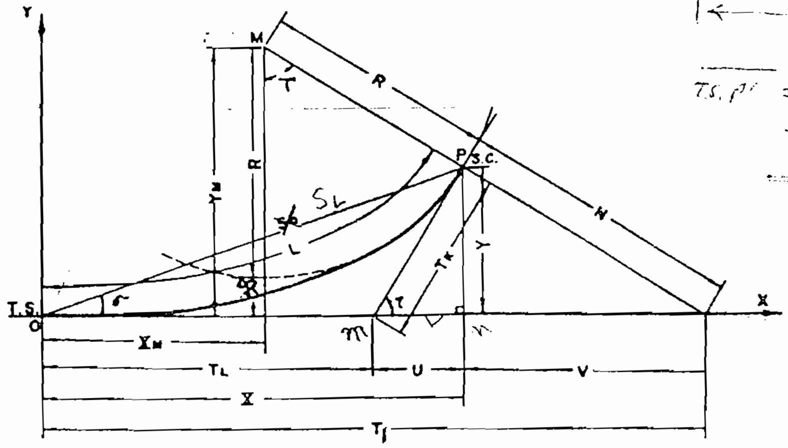
$$T_{l}\,(\text{不含單曲線})=S_{L}\frac{\cos(\tau-\sigma)}{\cos\tau}\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim80)$$

T（用於單曲線與直線間之漸曲線）

$$=S_{L}\frac{\sin(\tau-\sigma)}{\sin\tau}+S_{L}\frac{\sin\sigma\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\triangle\cos\frac{\triangle}{2}}+R\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\triangle}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(9\sim81)$$



$\overline{TS.P'} = T_1 \cos\tau$
$= S_L \cos(\tau-\sigma)$



圖九～27　克羅梭曲線

式中：X＝克羅梭曲線與單曲線相接點之 x 座標。

Y＝克羅梭曲線與單曲線相接點之 y 座標。

R＝單曲線之曲率半徑。

A＝克羅梭曲線參數。

L＝克羅梭曲線長。

τ＝克羅梭曲線在 SC 點之切線與 x 軸所成之切線角。

S_L＝ ~~AC弦長~~。TS 至 SC ...

T_K＝短切線長。

T_L＝長切線長。

$\triangle R$＝移距。

σ＝C點之偏角（弦S_L與 x 軸所交之角）。

$\frac{\theta}{2}$＝單曲線起點處之半徑與兩切線交點至單曲線之圓心間聯線所成之交角。

$\triangle$＝兩切線交點處之外偏角。

在實際敷設時，都將有關要素製成表，按所知之元素查表卽得所需之數值，可免除計算之繁。

例題九～4　設車輛之設計速率爲60公里／小時，試按半徑R＝300 公尺，外偏角$\triangle$=30°，θ＝23°37′44″　L_c求各要素數值，並簡述其敷設法。

解：設採用參數A＝100 公尺

$\theta = I - 2\tau = 30^\circ - 2\times(3^\circ 11' 8'')$

由式（9～69）

$L=A^2/R=10000/300=33.333$ 公尺

由式（9～73）

$$\tau=L/2R=\frac{33.333}{2\times300}=0.0556 \text{ 半徑角} \fallingdotseq 3°11'8''$$

由式（9～70）

$$X=L(1-\frac{L^2}{40R^2}+\frac{L^4}{3456R^4})$$

$$=33.333(1-\frac{33.333^2}{40\times300^2}+\frac{33.333^4}{3456\times300^4})=33.323 \text{ 公尺}$$

由式（9～71）

$$Y=\frac{L^2}{6R}(1-\frac{L^2}{56R^2}+\frac{L^4}{7040R^4})$$

$$=\frac{33.333^2}{6\times300}(1-\frac{33.333^2}{56\times300^2}+\frac{33.333^4}{7040\times300^4})=0.617 \text{ 公尺}$$

由式（9～74）

$$\triangle R=Y+R(\cos(\tau)-1)$$

$$=0.617+300\cos3°11'8''-300=0.155 \text{ 公尺}$$

由式（9～75）

$$X_m=X-R\sin\tau$$

$$=33.323-300\sin3°11'8''=16.643 \text{ 公尺}$$

由式（9～76）

$$T_K=\frac{Y}{\sin\tau}$$

$$=0.617\times\frac{1}{\sin3°11'8''}=11.097 \text{ 公尺}$$

由式（9～77）

$$T_L=X-Y\cot\tau$$

$$=33.323-0.617\cot3°11'8''=22.242 \text{ 公尺}$$

由式（9～79）

$$\sigma=\tan^{-1}\frac{Y}{X}=\tan^{-1}\frac{0.617}{33.323}=1°3'39''$$

由式（9～78）

$$S_L = Y / \sin\sigma = \frac{0.617}{\sin 1°3'39''} = 33.326 \text{公尺}$$

由式（9～81）

$$T = S_L \frac{\sin(\tau-\sigma)}{\sin\tau} + S_L \frac{\sin\sigma\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\tau\cos\frac{\triangle}{2}} + R\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\triangle}{2}}$$

$$= 33.326\frac{\sin(3°11'8''-1°3'39'')}{\sin 3°11'18''} + 33.326\frac{\sin 1°3'39''\cos 11°48'52''}{\sin 3°11'8''\cos 15°}$$

$$+300\frac{\sin 11°48'52''}{\cos 15°} = 97.05 \text{公尺}$$

克羅梭漸曲線上各點之敷設法大致如下：

a．由 I.P. 交點各量切線長T（如本例題T＝97.05 公尺）得曲線起點A及終點B。

b．沿A點之切線方向量長X（X＝33.323公尺），並於該點之垂直方向長Y（Y＝0.617 公尺）得克羅梭曲線與單曲線之交點C。或沿A點之切線方向量X及T_L＝22.242 公尺得m及n兩點，以之爲圓心，各以T_K=11.097公尺，及Y＝0.617公尺爲半徑，兩圓弧交於C，則C爲所求之克羅梭曲線與單曲線之交點。

c．沿A點之切線方向量長X_m=(X_m＝16.643 公尺）並於該點之垂直方向量長$\frac{\triangle R}{2}$＝0.078 公尺得移距之半，亦爲克羅梭斷曲線通過之一點，作爲校核之用。

d．漸曲線上各點之測設主要有支距及偏角法，或混合各種測設法敷設之。詳細測設法，請參閱公路曲線測設法。

(a) 支距法：在克羅梭漸曲線上選定相距5～20 公尺之各中間樁，設各中間樁距A點之距離各爲L_1、L_2、L_3……根據已知之A及L_1、L_2、L_3……代入式（9～69）可得相對之R_1、R_2、R_3……。

將L_1、L_2、L_3……及相對應之R_1、R_2、R_3………代入式（9～70）及（9～71）卽可算出x_1、x_2、x_3……及y_1、y_2、y_3……。

沿A點之切線方向量取x_1、x_2、x_3……並各作垂直線量取相對應之y_1、y_2、y_3………卽可定出漸曲線上各點。

(b) 偏角法：如同支距法一樣由式（9～78）及（9～79）求出各測點之弦長及極角，沿A點之切線方向量出偏角並沿視線方向量出相對應之弦長，卽得漸曲線上之一點，依序以此法可求出漸曲線上各點。

以上乃簡單介紹目前所採用的三種漸曲線之線型，其詳細資料及舖設法請參閱有關公路曲線測設表。

平面測量學. 附錄(19)
(P440 − 441)

C. 三次拋物線:

公式(8) 右邊第二項甚小. 可得近似值

$$y = \frac{x^3}{6RL}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2LR} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{LR}$$

(加速度與x成比例)

$$\left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{dl}{dx} = \left(1 + \frac{x^4}{4(RL)^2}\right)^{1/2}$$

$$l = x\left(1 + \frac{x^4}{40(RL)^2} - \frac{x^8}{1152(RL)^4} + \cdots\right)$$

$$x = l\left(1 - \frac{1}{40}\frac{l^4}{(LR)^2} + \frac{23}{5760}\frac{l^8}{(LR)^4} \cdots\right)$$

$$y = \frac{l^3}{6RL}\left(1 - \frac{3}{40}\frac{l^4}{(LR)^2} + \cdots\right)$$

$$\left(dl = \frac{RL}{l}d\theta\right)$$

$$dX = dl \cdot \cos\theta$$

$$= \underbrace{\frac{RL}{l}d\theta}\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{RL}{\sqrt{2RL\theta}}d\theta\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2RL}\left(\theta^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2!}\theta^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4!}\theta^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{6!}\theta^{\frac{11}{2}}\right)d\theta$$

$$X = \int dX = \sqrt{2RL}\left(\theta^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{5\cdot 2!}\theta^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9\cdot 4!}\theta^{\frac{9}{2}} - \cdots\right)$$

$$= \sqrt{2RL\theta}\left(1 - \frac{1}{5\cdot 2!}\theta^2 + \frac{1}{9\cdot 4!}\theta^4 - \cdots\right)$$

$$= l\left(1 - \frac{1}{5\cdot 2!}\theta^2 + \frac{1}{9\cdot 4!}\theta^4 - \frac{1}{13\cdot 6!}\theta^6 + \right) \qquad \text{Note: } \theta = \frac{l^2}{2RL}$$

$$dy = dl \cdot \sin\theta$$

$$= \frac{RL}{l}d\theta\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$y = \int dy = l\left(\frac{\theta}{3\cdot 1!} - \frac{\theta^3}{7\cdot 3!} + \frac{\theta^5}{11\cdot 5!} - \frac{\theta^7}{15\cdot 7!}\right)$$

$$= l\left(\frac{l^2}{3\,2RL} - \frac{1}{7\cdot 3!}\frac{l^6}{(2RL)^3} + \cdots\right) \qquad \text{Note: } \theta = \frac{l^2}{2RL} \implies (A)$$

When $x = X \quad \theta = \Theta \quad l = L$

$$X = L\left(1 - \frac{1}{5\cdot 2!}\left(\frac{L}{2R}\right)^2 + \frac{1}{9\cdot 4!}\left(\frac{L}{2R}\right)^4 - \frac{1}{13\cdot 6!}\left(\frac{L}{2R}\right)^6 + \cdots\right)$$

$$= L\left(1 - \frac{L^2}{40R^2} + \frac{L^4}{3456R^4} - \frac{L^6}{599040R^6} + \cdots\right)$$

$$Y = L\left(\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2R}\right) - \frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{L}{2R}\right)^3 + \frac{1}{11\cdot 5!}\left(\frac{L}{2R}\right)^5 - \cdots\right)$$

$$= \frac{L^2}{6R}\left(1 - \frac{L^2}{56R^2} + \frac{L^4}{7040R^4} - \cdots\right)$$

3.螺旋曲線計算公式

a. $P=\dfrac{1}{R}=K\cdot L$

$$\frac{1}{R}=\frac{L}{A^2} \qquad \text{(Clothoid)}$$

或 $R\cdot L=A^2$

b. $d\phi=\dfrac{dL}{R}=\dfrac{L}{A^2}dL$

$$\phi=\int_0^l \frac{L}{A^2}\cdot dL$$

$$=\frac{L^2}{2A^2}=\frac{L}{2R}$$

c. $dx=\cos\phi\cdot dL=(1-\dfrac{\phi^2}{2!}+\dfrac{\phi^4}{4!}-\dfrac{\phi^6}{6!}+\cdots)dL$

$$X=\int_0^l \cos\phi\cdot dL=L\cdot(1-\frac{\phi^2}{5\cdot 2!}+\frac{\phi^4}{9\cdot 4!}-\frac{\phi^6}{13\cdot 6!}+\cdots)$$

$$dy=\sin\phi\cdot dL=(\phi-\frac{\phi^3}{3!}+\frac{\phi^5}{5!}-\frac{\phi^7}{7!}+\cdots)dL$$

$$y=\int_0^l \sin\phi\cdot dL=L\cdot(\frac{\phi}{3}-\frac{\phi^3}{7\cdot 3!}+\frac{\phi^5}{11\cdot 5!}-\frac{\phi^7}{15\cdot 7!}+\cdots)$$

d. $Xm=X-R\sin\phi$

$Ym=Y+R\cos\phi$

$\triangle R=Ym-R=Y+R\cos\phi-R$

近似值

$$Xm\fallingdotseq\frac{L}{2}$$

$$\triangle R\fallingdotseq\frac{L^2}{24R}$$

三次拋物線：

R_C ：圓曲線之曲率半徑

X_C ：三次曲線起點至單曲線連接處之距離

X ：曲線上任一點至切線與漸曲線連接處之距離

R ：曲線上任一點曲率半徑

D_c ：單曲線之曲度

D ：漸曲線上任一點曲度

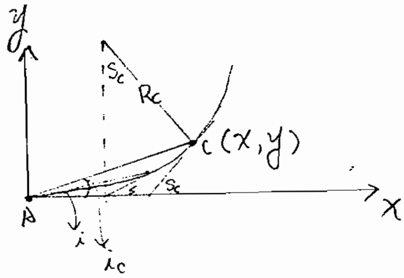
i ：漸曲線起點對於曲線上任一點之總偏角

i_c ：三次曲線起點至單曲線連接處之總偏角

S ：漸曲線起點對於曲線上任一點之漸曲線角

S_c ：三次曲線起點至單曲線連接處之漸曲線角

p ：單曲線起點之切線支距



$$\frac{1}{R}=\frac{X}{X_C}\times\frac{1}{R_C}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cong\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\because\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\ll 1$$

$$\frac{X}{R_C X_C}=\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2R_C X_C}$$

$$y=\frac{x^3}{6R_C X_C}$$

若 $X=X_C$ 則 $\overset{Y_c}{y}=\dfrac{X_C^2}{6R_C}$

$$i=\tan(i)=\frac{y}{X}=\frac{X^2}{6R_cX_c}$$

$$S\cong\tan S=\frac{dy}{dx}=\frac{X^2}{2R_cX_c}$$

$$S_c\cong\tan S_c=\frac{X_c^2}{2R_cX_c}=\frac{X_c}{2R_c}$$

$$\frac{i}{i_c}=\frac{S}{S_c}=\left(\frac{X}{X_c}\right)^2$$

$$p=\underset{\underset{Y_c}{\|}}{y}-(R_c-R_c\times\cos(S_c))=\overset{\overset{Y_c}{\|}}{y}-R_c(1-\cos(S_c))$$

三次拋物線之相關公式：

$$R = \frac{X_C R_C}{X}, D = \frac{XD_C}{X_C}$$

$$S = \frac{X^2}{2R_c X_c}, S_c = \frac{X_c}{2R_c}$$

Y

$$y = \frac{X_c^2}{6R_c}$$

$$X = L_c - \frac{L_c^3}{40R_c^2}$$

$$p = \overset{Y}{y} - R_c\left(1 - \cos(S_c)\right)$$

$$q = X_{\cancel{c}} - R_c Sin(S_c)$$

$$i = \frac{X^2}{6R_c X_c} = \frac{S}{3},$$

$$i_c = \frac{S_c}{3}$$

$$i = i_c\left(\frac{X}{X_c}\right)^2$$

克羅梭曲線：

R_C ：圓曲線之曲率半徑

L ：克羅梭曲線長

L_C ：三次曲線起點至單曲線連接處之曲線長

X ：克羅梭曲線與單曲線連接處之 x 座標

Y ：克羅梭曲線與單曲線連接處之 y 座標

R ：曲線上任一點曲率半徑

τ ：克羅梭曲線與單曲線連接處之切線與 x 軸所成之切線角

S_L ：克羅梭曲線之弦長

A ：克羅梭曲線參數(另稱曲率通徑)

T_K ：短切線長

T_L ：長切線長

σ ：弦 S_L 與 x 軸之偏角

定義：

克羅梭曲線上任一點均得以成立以下之恆等式

(曲線上任一點曲率半徑 R) × (克羅梭曲線起線至某點之曲線長 L)

= A^2 (定值)

克羅梭曲線參數(另稱曲率通徑)A 越大，曲率增加越緩慢，因此適合汽車快速行駛，參數 A 小時之克羅梭曲線，曲率增加急促，故適合設計標準低之道路。

dL=R × $d\tau$

$$dX = dL\cos\tau$$

$$dY = dL\sin\tau$$

因 R × L= A^2 代入上式得

$$dL = \frac{A^2}{L}d\tau$$

積分得 $L^2 = 2A^2\tau$

$$\tau = \frac{L^2}{2A^2} = \frac{L}{2R}$$

以 $L = A\sqrt{2\tau}$ 得 $\overset{r}{\cancel{R}} = \frac{A^2}{L} = \frac{A}{\sqrt{\tau\times 2}}$

$$dl = A\sqrt{2}\,\tfrac{1}{2}(\tau)^{-\frac{1}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2\tau}}$$

則

$$dX = dL\cos\tau = \frac{A^2}{L}\cos(\cancel{d}\tau) = \frac{A}{\sqrt{2\tau}}\cos(\cancel{d}\tau)$$

$$dY = dL\sin\tau = \frac{A^2}{L}\sin(\cancel{d}\tau) = \frac{A}{\sqrt{2\tau}}\sin(\cancel{d}\tau)$$

積分得下式

$$X=\frac{A}{\sqrt{2}}\int_0^{\tau}\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau$$

$$Y=\frac{A}{\sqrt{2}}\int_0^{\tau}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}d\tau$$

以下爲相關公式：

$$A=\sqrt{RL}$$

$$L=2R\tau$$

$$\Delta R=Y+R\cos\tau-R$$

$$X_m=X-R\sin\tau$$

$$T_K=\frac{y}{\sin\tau}$$

$$T_L=X-Y\cot\tau$$

$$\sigma=\tan^{-1}\frac{Y}{X}$$

$$S_L=Y\operatorname{cosec}\sigma$$

結論：

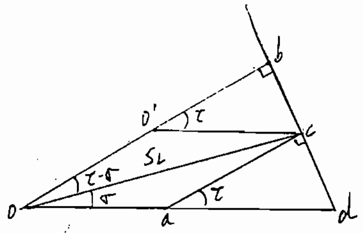
三次拋物線之公式應爲$y=\dfrac{x^3}{6R_cX_c}$，而不是$y=\dfrac{x^3}{6R_cL_c}$，因其爲近似值，在鐵路設計中因單曲線之曲率半徑極大故將克羅梭曲線之公式$y=\dfrac{L^3}{6R_cL_c}$，再利用$x\approx L$得$y=\dfrac{x^3}{6R_cL_c}$，這是有待商確的，因三次拋物線之公式是以($\dfrac{1}{R}=\dfrac{X}{X_C}\times\dfrac{1}{R_C}$)積分得之，而克羅梭曲線之公式是以($\dfrac{1}{R}=\dfrac{L}{L_C}\times\dfrac{1}{R_C}$)積分得之。

$$RL=A^2$$

for point c = S.C

∴ $\overline{oa} = \overline{o'c}$

△ obd



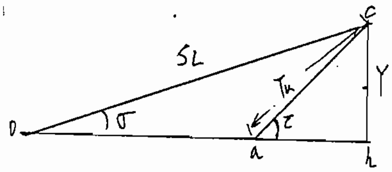
$\overline{bc} = S_L \sin(\tau-\sigma)$

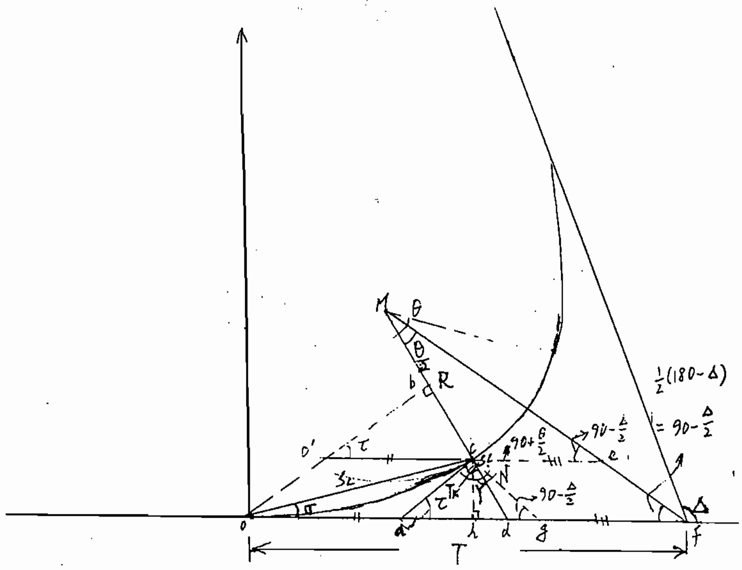
$= \overline{o'c}\sin\tau$

$\overline{o'c} = \dfrac{S_L\sin(\tau-\sigma)}{\sin\tau}$

$= \overline{oa}$

△ och



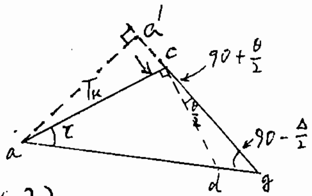


$Y = S_L \sin\sigma$

$= T_k \sin\tau$

$T_k = S_L \cdot \dfrac{\sin\sigma}{\sin\tau}$

△ acg



$\dfrac{T_k}{\sin(90-\frac{\Delta}{2})} = \dfrac{\overline{ag}}{\sin(90+\frac{\theta}{2})}$ (?)

$\overline{ag} = T_k \cdot \dfrac{\sin(90+\frac{\theta}{2})}{\sin(90-\frac{\Delta}{2})}$ $(\sin(90+\frac{\theta}{2}) = \cos\frac{\theta}{2})$ $(\sin(90-\frac{\Delta}{2}) = \cos\frac{\Delta}{2})$

$= S_L \dfrac{\sin\sigma}{\sin\tau} \cdot \dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}$

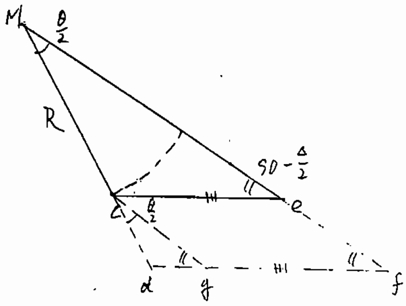
$\overline{aa'} = T_K \sin(90-\frac{\theta}{2})$

$= \overline{ag}\sin(90-\frac{\Delta}{2})$

$\overline{ag} = T_K \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}$

蔡金厦

△ Mce



$\overline{ce} \,//\, \overline{gf}$

$\angle ceM = \angle dfe = 90-\frac{\Delta}{2}$

$\dfrac{\overline{ce}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \dfrac{R}{\sin(90-\frac{\Delta}{2})}$

$\overline{ce} = \dfrac{R\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{\sin(90-\frac{\theta}{2})} = R\cdot\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}$

□cefg 為平行四边形

∴ $\overline{ce} = \overline{gf} = R\cdot\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}$

$T = \overline{oa} + \overline{ag} + \overline{gf} = S_L\dfrac{\sin(\tau-\sigma)}{\sin\tau} + S_L\dfrac{\sin\sigma\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\tau\cos\frac{\Delta}{2}} + R\cdot\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}$

P189
(公式9~81)