

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

12 假設檢定

學習目的

1. 瞭解假設檢定的基本概念與型 I 錯誤與型 II 錯誤。
2. 熟習假設檢定的步驟。
3. 學習一尾與兩尾假設檢定的方法。
4. 學習傳統檢定方法與 P 值法。
5. 瞭解 β 值、作業特性曲線與檢定力函數。
6. 瞭解母體平均數的假設檢定的方法、步驟及其應用。
7. 瞭解母體比例、母體變異數的假設檢定的方法、步驟及其應用。
8. 瞭解檢定時，在控制 α 、 β 的水準下，樣本數的選擇。
9. 利用 Excel 來做假設檢定。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

本章結構

假設檢定

- 假設檢定的基本概念
 - 兩個假設
 - 兩個決策
 - 兩個錯誤
 - α 與 β 的關係
 - 顯著水準
 - α 的選擇
 - 一尾與雙尾檢定
 - 假設檢定的步驟
- 母體平均數的假設檢定 - 大樣本
 - 臨界值檢定法
 - Z 值法
 - P 值法
- 母體平均數的假設檢定 - 小樣本
 - 型 II 錯誤
 - 機率的求算
 - 作業曲線
 - 檢定力函數
- 母體比例的假設檢定
- 母體變異數的假設檢定
- 樣本數的選擇與假設檢定
- Excel 的使用

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

假設檢定

○ 假設檢定的意義

對有關母體參數的假設，利用樣本的訊息，決定接受(不拒絕)該假設或拒絕該假設的統計方法。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

假設檢定的基本概念

○ 兩個假設

- ① 虛無假設

對母體參數的某一假設或主張假定其為真實的(除非證明其為非真)一個假設稱為虛無假設。
- ② 對立假設

對立假設是相對於虛無假設而對母體參數提出的另一個不同的假設或主張。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

假設檢定的基本概念

○ 設立假設的原則

- ① 將想要利用樣本統計量去驗證的假設設為對立假設，想要否定的假設設為虛無假設。
- ② 錯誤地拒絕某一假設的後果較錯誤地接受或不拒絕該某一假設的後果為嚴重者，將該假設設為虛無假設。
- ③ 將他人的主張做為虛無假設，亦即假定他人的主張是真實的。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

假設檢定的基本概念

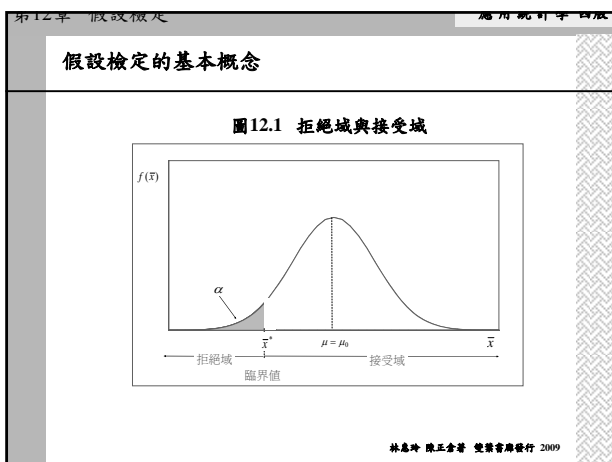
○ 兩個決策

- ① 不拒絕 H_0 (或接受 H_0)

若樣本統計量落在接受域，則「不拒絕」或「接受」虛無假設。
- ② 拒絕 H_0

若樣本統計量落在拒絕域，則「拒絕」虛無假設，推斷對立假設 H_1 為真。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009



第12章 假設檢定 應用統計學 四版

假設檢定的基本概念

○ 兩個錯誤

① 型I錯誤
當 H_0 為真，而拒絕 H_0 所發生的錯誤，稱為型I錯誤(type I error)。型I錯誤的機率為 α ，表為

$$\alpha = P(\text{拒絕}H_0 | H_0 \text{為真})$$

α 又稱為顯著水準(significance level)。

② 型II錯誤
當 H_0 為假(或 H_1 為真)，而不拒絕 H_0 所發生的錯誤，稱為型II錯誤(type II error)。型II錯誤的機率以 β 表示：

$$\beta = P(\text{II}) = P(\text{不拒絕}H_0 | H_0 \text{為假})$$

$1 - \beta$ 稱為檢定力，表示 H_0 為假，不拒絕 H_0 的機率。

林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 2009

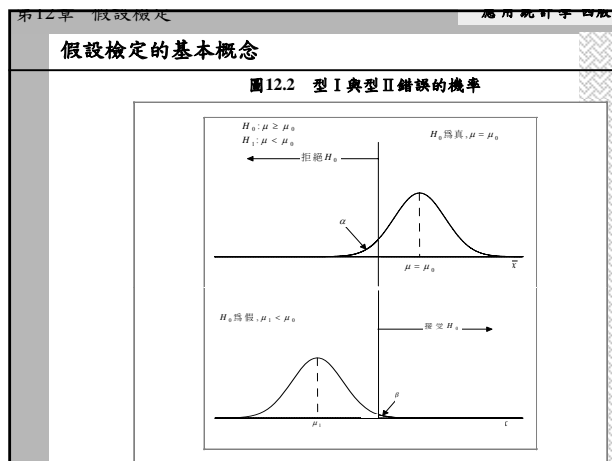
第12章 假設檢定 應用統計學 四版

假設檢定的基本概念

表12.1 假設檢定決策正確與錯誤的機率

決策	真實情況	真實情況	
		H_0 為真	H_1 為真
不拒絕 H_0	$1 - \alpha$ (正確機率)	β (錯誤機率)	
拒絕 H_0	α (錯誤機率)	$1 - \beta$ (正確機率)	

林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 2009

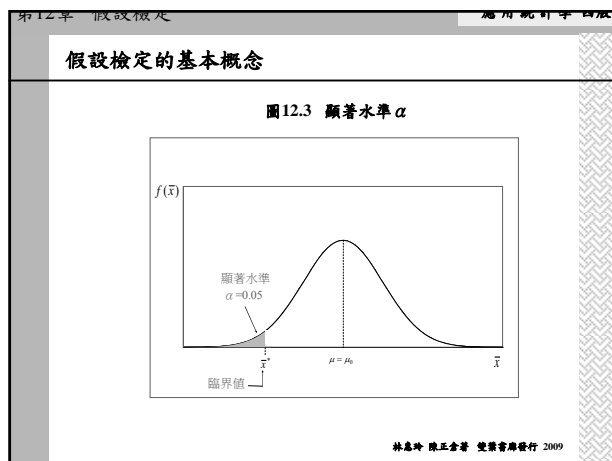


第12章 假設檢定 應用統計學 四版

假設檢定的基本概念

○ 顯著水準
在假設檢定過程中，檢定人員所能容忍的型I錯誤最大的機率。以 α 表示。

林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 2009



第12章 假設檢定 應用統計學 第四版

假設檢定的基本概念

圖12.4 法官判案時的拒絕域與接受域

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 第四版

假設檢定的基本概念

- **一尾檢定**
只有一個拒絕域的檢定稱為一尾檢定。拒絕域在左尾的稱為左尾檢定，拒絕域在右尾的尾檢定稱為右尾檢定。
- **雙尾檢定**
有兩個拒絕域的檢定稱為兩尾檢定，兩尾各有一個拒絕域。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 第四版

假設檢定的基本概念

圖12.5 左尾檢定

圖12.6 右尾檢定

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 第四版

假設檢定的基本概念

圖12.7 雙尾檢定

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 第四版

假設檢定的基本概念

表12.2 假設檢定的符號

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0 的符號	$=$	\geq	\leq
對立假設 H_1 的符號	\neq	$<$	$>$
拒絕域	在左右雙尾	在左尾	在右尾
α 值	$\alpha/2$	α	α

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 第四版

假設檢定的基本概念

- **假設檢定的步驟**
 - ① 步驟1 設立兩個假設
 - ② 步驟2 選擇檢定統計量
 - ③ 步驟3 決定拒絕域及接受域(行動法則或決策法則)
 - ④ 步驟4 計算檢定統計量(或將檢定統計量與臨界值比較)
 - ⑤ 步驟5 下結論

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 臨界值檢定法

在既定顯著水準 α 下，計算出臨界值，決定拒絕域與接受域以決定拒絕或接受虛無假設的方法。

○ 臨界值法的決策法則

- ① 左尾檢定：若 $\bar{X} \geq \bar{X}^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{X} < \bar{X}^*$ ，則拒絕虛無假設。臨界值 $\bar{X}^* = \mu_0 - Z_{\alpha} \sigma_{\bar{X}}$ 。
- ② 右尾檢定：若 $\bar{X} \leq \bar{X}^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{X} > \bar{X}^*$ ，則拒絕虛無假設。臨界值 $\bar{X}^* = \mu_0 + Z_{\alpha} \sigma_{\bar{X}}$ 。
- ③ 兩尾檢定：若 $\bar{X}_L^* \leq \bar{X} \leq \bar{X}_U^*$ ，則接受虛無假設。
若 $\bar{X} < \bar{X}_L^*$ 或 $\bar{X} > \bar{X}_U^*$ ，則拒絕虛無假設。下臨界值 $\bar{X}_L^* = \mu_0 - Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ ，上臨界值 $\bar{X}_U^* = \mu_0 + Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}$ 。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

表12.3 凍頂烏龍茶的重量

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	288	294	306	286	296	306	307	288	302
2	294	289	295	293	307	293	295	301	309
3	304	286	289	296	290	296	289	293	294
4	288	305	290	307	291	295	297	310	287

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.8 \bar{X} 的抽樣分配

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.9 臨界值與接受域拒絕域

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.10 樣本平均數與臨界值的比較

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.11 假設檢定的過程

```

    graph TD
      A[設立假設] --> B[選擇檢定的樣本統計量]
      B --> C[決定決策法則]
      C --> D[抽樣並進行檢定]
      D --> E{統計差異是否顯著}
      E -- Yes --> F[拒絕該假設]
      E -- No --> G[接受該假設]
  
```

林惠玲 陳正倉著 雙葉書庫發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.12 敘述統計對話方塊

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

表12.4 烏龍茶的樣本平均數與標準差

	A	B
1	凍頂烏龍茶的重量	
2		
3	平均數	296
4	標準誤	1.226040213
5	標準差	7.356241276
6	變異數	54.11428571
7	信賴區(95.0%)	2.48899394

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ Z值法

Z值法或稱標準統計量檢定法。它是先將檢定統計量化為標準檢定統計量，然後再進行檢定的方法。

○ Z值法的決策法則

- ①左尾檢定：若 $Z \geq -Z_\alpha$ ，則接受虛無假設。
若 $Z < -Z_\alpha$ ，則拒絕虛無假設。
- ②右尾檢定：若 $Z \leq Z_\alpha$ ，則接受虛無假設。
反之，若 $Z > Z_\alpha$ ，則拒絕虛無假設。
- ③兩尾檢定：若 $-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}$ ，則接受虛無假設。
反之，若 $Z < -Z_{\alpha/2}$ 或 $Z > Z_{\alpha/2}$ ，則拒絕虛無假設。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.13 學習時間的假設檢定

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.15 平均可用晶片數的檢定

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ P值

在 H_0 為真的情況下，若採右尾檢定，P值為大於樣本結果的機率值；若採左尾檢定，P值為小於樣本結果的機率值，若採兩尾檢定，P值為大於或小於樣本結果的機率值的2倍。

○ P值檢定法的決策法則

- ①若 $P值 < \alpha$ ，則拒絕虛無假設 H_0 。
- ②若 $P值 \geq \alpha$ ，則接受虛無假設 H_0 。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

- 左尾檢定的 P 值

$$P\text{值} = P(\bar{X} \leq \bar{X}_0 | \mu = \mu_0)$$
- 右尾檢定的 P 值

$$P\text{值} = P(\bar{X} \geq \bar{X}_0 | \mu = \mu_0)$$
- 雙尾檢定的 P 值

若 $\bar{X}_0 > \mu_0$, 則 $P\text{值} = 2 \times P(\bar{X} \geq \bar{X}_0 | \mu = \mu_0)$

若 $\bar{X}_0 < \mu_0$, 則 $P\text{值} = 2 \times P(\bar{X} \leq \bar{X}_0 | \mu = \mu_0)$

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.16 烏龍茶重量的檢定 P 值法

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.16 P 值法的對話方塊

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

圖12.17 所得申報的檢定 P 值法

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ P 值的大小

P 值的大小可以與 α 值作比較，但它仍然是主觀的。到底，值應根據什麼樣的法則來判定，才是比較客觀理想呢？一般而言，可根據下面兩個原則：

- ① 虛無假設的可信度

若虛無假設是人們長久以來所相信的主張，那麼要推翻它（拒絕虛無假設），就需要有很強的證據，亦即需要很小的 P 值，才能夠讓人心服。
- ② 拒絕虛無假設的後果

如果拒絕虛無假設的成本非常大，那麼就需要有很強的證據來支持對立假設。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

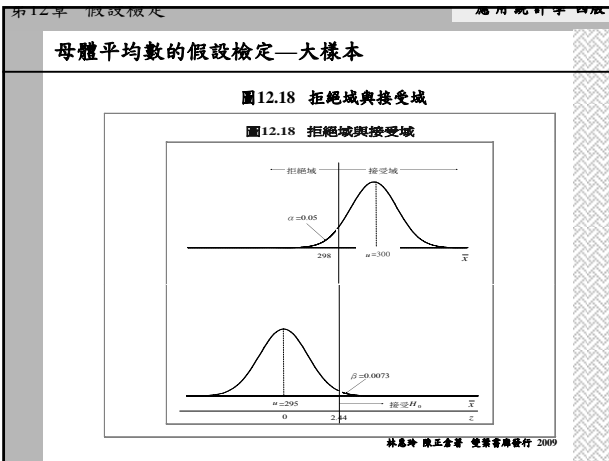
第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 型II錯誤機率求算的步驟

- ① 確定接受域的範圍。
- ② 計算 H_1 為真時，接受域範圍的機率。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009



第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

○ 作業曲線的意義

在對立假設所有可能的母體參數值 μ 下，將犯型 II 錯誤的機率 β 繪成一條曲線，稱爲作業特性曲線(operation characteristic curve)，簡稱爲OCC。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

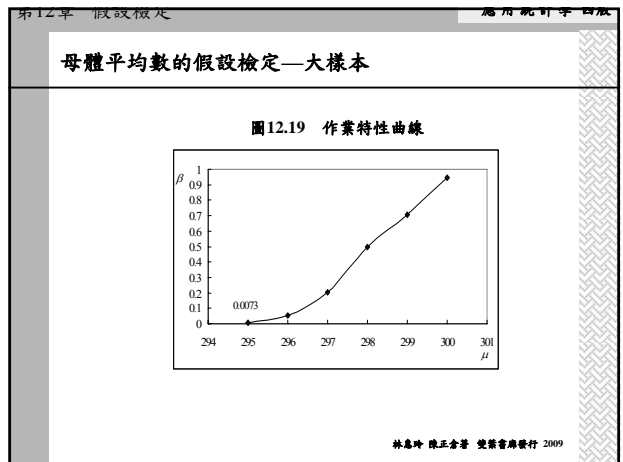
第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

表12.5 型 II 錯誤的機率 β

真正母體參數 μ	$Z = \frac{\bar{X}^* - \mu}{S / \sqrt{n}}$	型 II 錯誤 β	檢定力 $1 - \beta$
295	2.44	0.0073	0.9927
296	1.63	0.0516	0.9484
297	0.82	0.2061	0.7939
298	0	0.5000	0.5000
299	-0.82	0.7061	0.2939
300	-1.63	0.9474	0.0526

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009



第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—大樣本

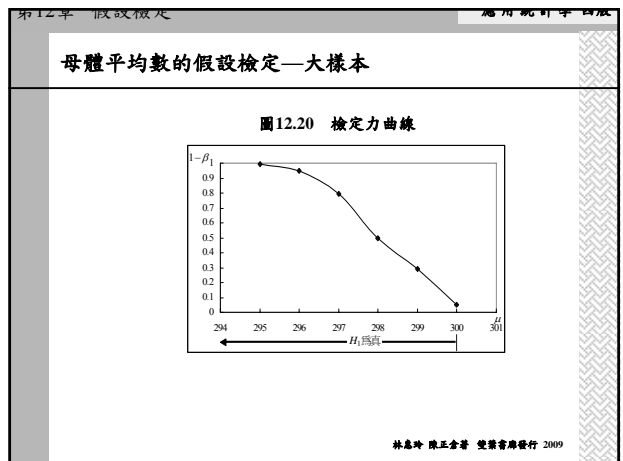
○ 檢定力函數

檢定力是 H_0 爲真時，做正確檢定決策的機率。檢定力函數表爲：

$$1 - \beta = P(\text{拒絕}H_0 | H_0 \text{爲假}) = P(\text{接受}H_1 | H_1 \text{爲真})$$

此乃表示檢定力等於 減去型 II 錯誤的機率 β 。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009



第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—小樣本

○ t 分配在假設檢定時的適用條件

- ① 小樣本的情況下 ($n < 30$)
- ② 母體為常態分配
- ③ 母體標準差 σ 未知

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—小樣本

○ t 檢定統計量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_{\bar{X}}}$$

式中： μ_0 為猜測值。 \bar{X} 為樣本平均數，樣本平均數的標準差 $S_{\bar{X}} = S/\sqrt{n}$ 。 t 的自由度為 $n-1$ 。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—小樣本

圖 12.21 t 值的對話方塊



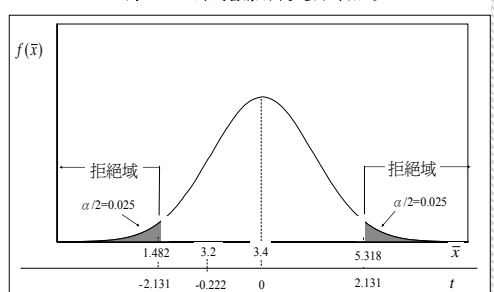
圖中顯示 Excel 的 TINV 函數對話方塊。輸入 Probability 為 0.05，Deg_freedom 為 15，計算結果為 2.131449536。下方註明「返回 Student's t 分配的反值」。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—小樣本

圖 12.22 國民醫療保健支出的檢定



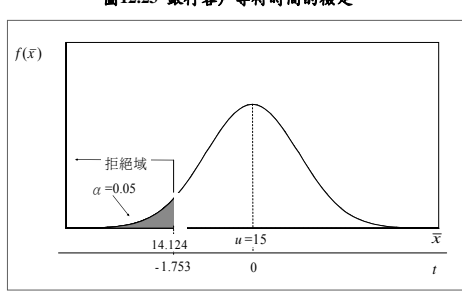
圖中顯示國民醫療保健支出的檢定。圖表顯示一個正態分布曲線，其中心值為 3.4。拒絕域位於 1.482 以左及 5.318 以右，其面積各為 $\alpha/2 = 0.025$ 。x 軸標註了 -2.131, -0.222, 0, 2.131, 5.318 等值。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

母體平均數的假設檢定—小樣本

圖 12.23 銀行客戶等待時間的檢定



圖中顯示銀行客戶等待時間的檢定。圖表顯示一個正態分布曲線，其中心值為 15。拒絕域位於 14.124 以左，其面積為 $\alpha = 0.05$ 。x 軸標註了 -1.753, 0, 14.124 等值。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定 應用統計學 四版

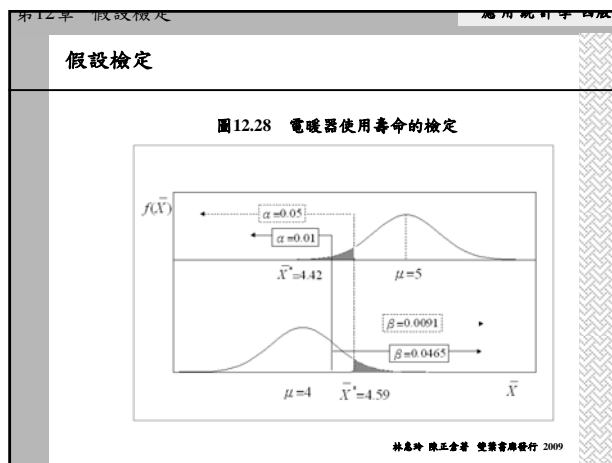
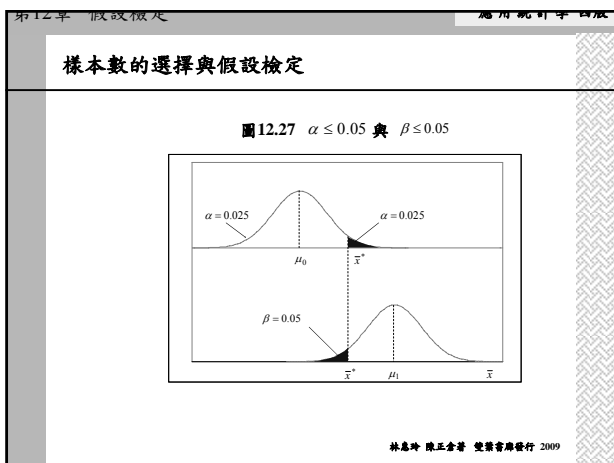
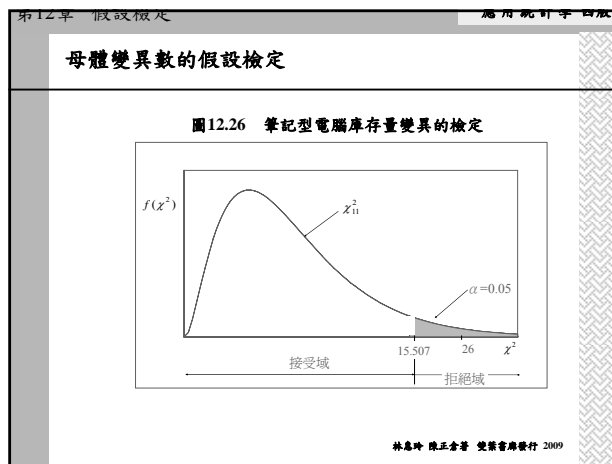
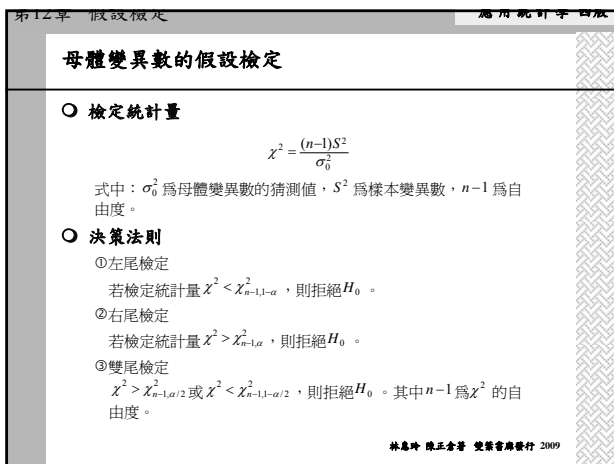
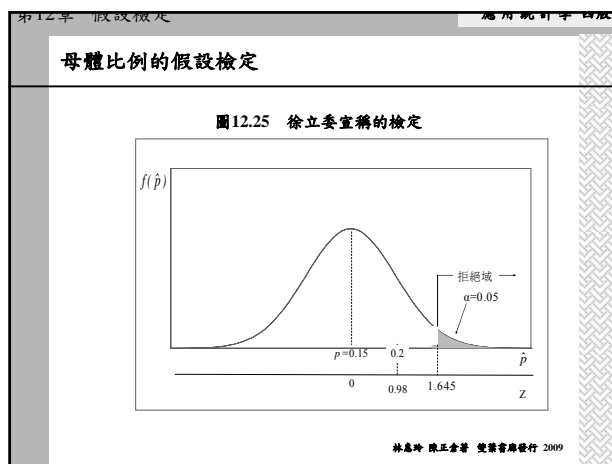
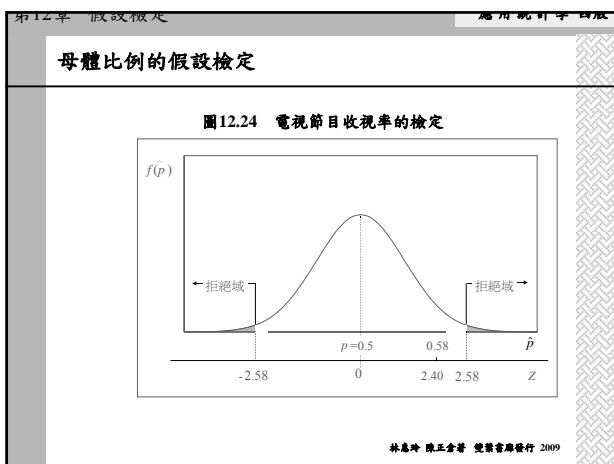
母體比例的假設檢定

○ 檢定統計量

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}$$

式中： p_0 為猜測值， \hat{p} 為樣本比例， $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p_0 q_0/n}$ 為樣本比例的標準差。

林惠玲 陳正倉著 雙葉書局發行 2009



第12章 假設檢定

樣本數的選擇與假設檢定

○ 母體平均數假設檢定的樣本數

① 單尾檢定

$$n = \frac{\sigma^2(Z_\alpha + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

② 雙尾檢定

$$n = \frac{\sigma^2(Z_{\alpha/2} + Z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

林惠玲 陳玉鑫著 雙葉書局發行 2009

第12章 假設檢定

樣本數的選擇與假設檢定

○ 母體比例假設檢定的樣本數

① 單尾檢定

$$n = \frac{(Z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta\sqrt{p_1(1-p_1)})^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

② 雙尾檢定

$$n = \frac{[Z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)} + Z_\beta\sqrt{p_1(1-p_1)}]^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

林惠玲 陳玉鑫著 雙葉書局發行 2009