Example 1 $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=(x+1)(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=+1, \Rightarrow \exists \text{ H-asym. } y=1;$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1, \Rightarrow \exists \text{ H-asym. } y=-1;$$

由此兩點便知
f 沒有斜漸近線。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}+(x+1)\cdot\tfrac{-1}{2}(x^2+1)^{\frac{-3}{2}}2x \\ &= [(x^2+1)-(x^2+x)](x^2+1)^{\frac{-3}{2}}=(1-x)(x^2+1)^{\frac{-3}{2}}, \text{ 與 } 1-x \text{ 同號。} \end{aligned}$$

令 $f'(x)=0, \iff 1-x=0, \Rightarrow x=1$, one critial point.

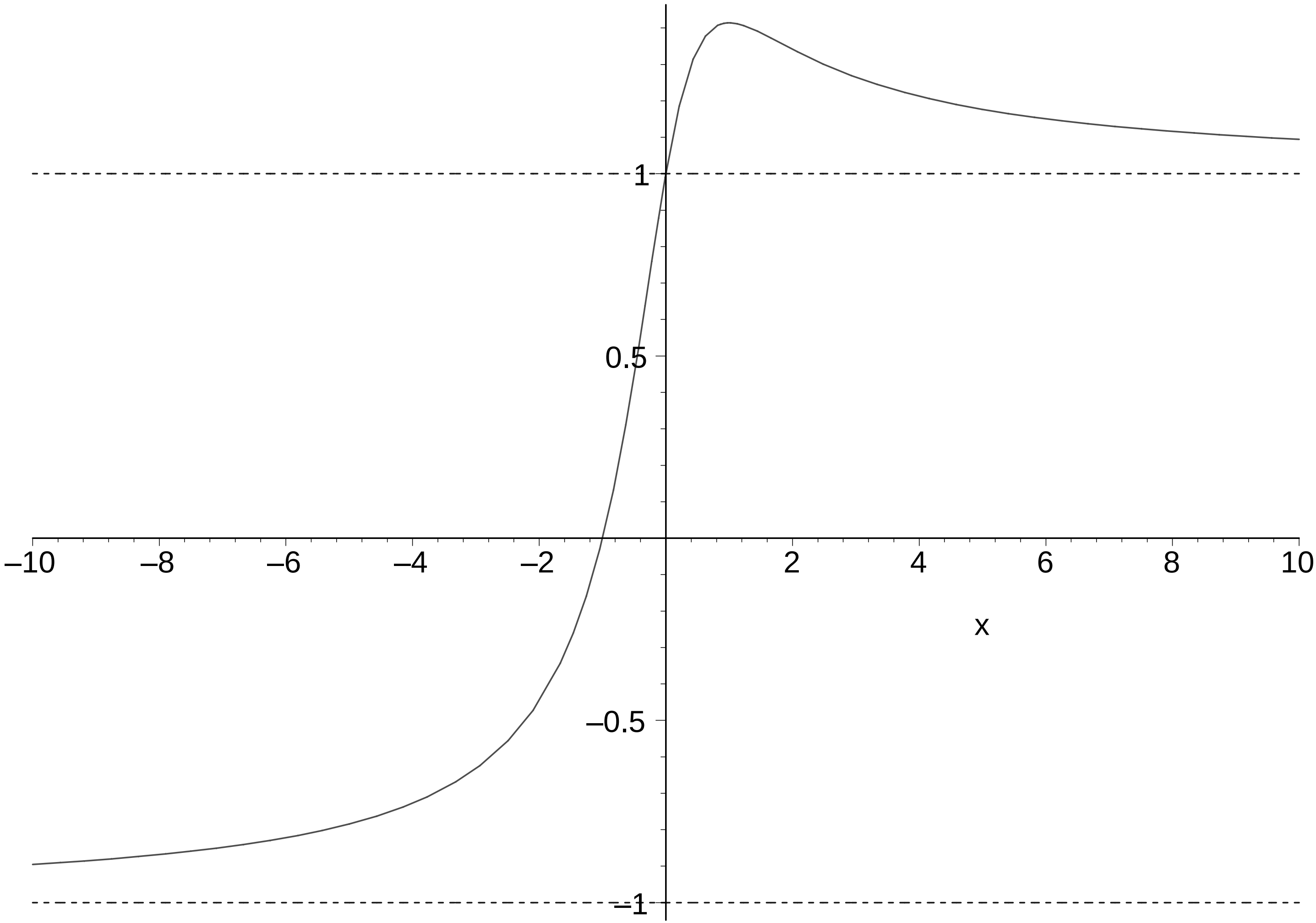
x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1\cdot(x^2+1)^{\frac{-3}{2}}+(1-x)\cdot\tfrac{-3}{2}(x^2+1)^{\frac{-5}{2}}(2x) \\ &= [-(x^2+1)+3x^2-3x](x^2+1)^{\frac{-5}{2}}=\tfrac{(2x^2-3x-1)}{\sqrt{(x^2+1)^5}}, \end{aligned}$$

令 $f''(x)=0, \iff 2x^2-3x-1=0, \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ (令 $a:-$, $b:+$, $a<0$, $1<b$)。於是, $f''(x)=\frac{2(x-a)(x-b)}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$, 與 $(x-a)(x-b)$ 同號。現在必須檢查 a,b 是否爲 inflection point:

x		a		b	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$		$\smile$

所以 a,b 皆是 inflection points。又, $a<1<b, \Rightarrow f''(1)<0, \Rightarrow f(1)=\sqrt{2}$ 是 local maximum。f 的圖形大致如下:


1
0.5
–0.5
–1
–10
–8
–6
–4
–2
2
4
6
8
10
x

Example 2 $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{x}{e^{(x^2/2+1)}}, = xe^{(-x^2/2-1)}$。

立即可以看出 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \Rightarrow$ 有水平漸近線 $y = 0$ (你也可用 *L'Hôpital Rule (£)* 驗證, 如: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \stackrel{£}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2/2+1}\cdot(2x^1/2+0)} = 0$)。

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2/2-1} + x \cdot e^{-x^2/2-1}(-x) = (1-x^2)e^{-x^2/2-1}$。
令 $f'(x) = 0, \iff (1-x^2) = 0, x = \pm 1$, 兩個 critical points。
由此式馬上可看出 $f'(x)$ 與 $(1-x^2)$ 同正負號, 所以

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f''(x) = (-2x) \cdot e^{-x^2/2-1} + (1-x^2) \cdot e^{-x^2/2-1}(-x) = x(x^2-3)e^{-x^2/2-1}$。
令 $f''(x) = 0, \iff x(x^2-3) = 0, x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$。
由此式馬上可看出 $f''(x)$ 與 $x(x^2-3)$ 同正負號, 所以

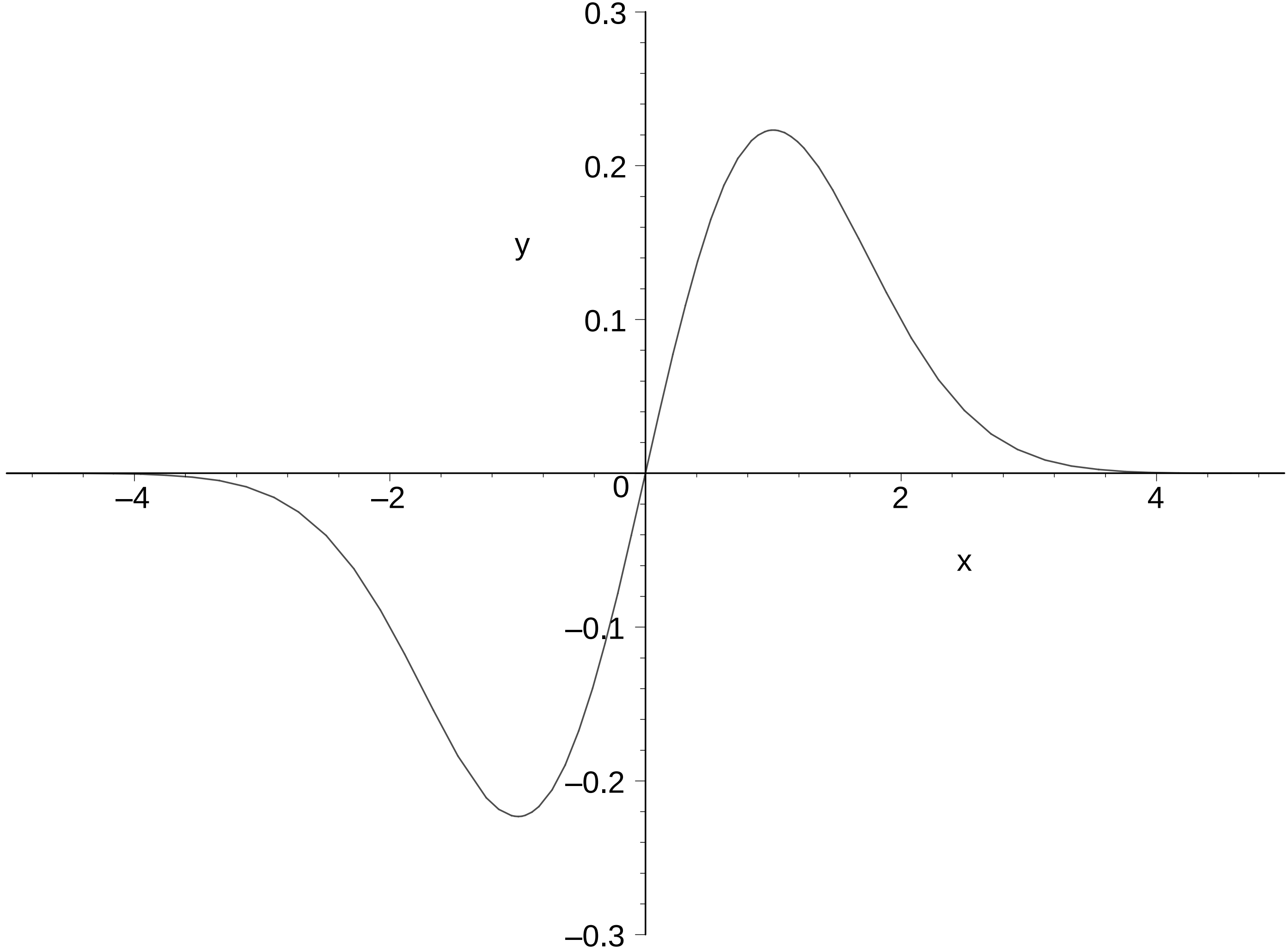
x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$

$-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ 都是 inflection points。又,

$-\sqrt{3} < \boxed{-1} < 0, \Rightarrow f''(-1) > 0, \Rightarrow f(-1) = -e^{\frac{-3}{2}}$ 是 local minimum;

$0 < \boxed{1} < \sqrt{3}, \Rightarrow f''(1) < 0, \Rightarrow f(1) = +e^{\frac{-3}{2}}$ 是 local maximum;

f 的圖形大致如下:


0.3
0.2
0.1
y
0
–4
–2
2
4
x
–0.1
–0.2
–0.3

Example 3 $f(x)=\dfrac{3x^3-5x^2}{6(x-2)}, = \frac{1}{6}(3x^2+x+2+\frac{4}{x-2}),$

Asymptotes: $\begin{array}{l} y=\frac{1}{6}(3x^2+x+2), \\ x=2. \end{array}$

$f'(x)=\frac{1}{6}(6x+1-\frac{4}{(x-2)^2})$

and $f''(x)=\frac{1}{6}(6+\frac{8}{(x-2)^3}), = \frac{4}{3}\frac{(x-2)^3+\frac{3}{4}}{(x-2)^3}.$

Let $f'(x)=0 \Rightarrow 6x^3-23x^2+20x=0 \Leftrightarrow x=0, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}.$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{6}\frac{x(3x-4)(2x-5)}{(x-2)^2}$:

x		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Let $f''(x)=0 \Rightarrow (x-2)^3=\frac{-3}{4} \Leftrightarrow x=2-\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=a.$

$\therefore f''(x)=\frac{4}{3}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-2)^3}=\underbrace{\frac{4}{3}\frac{x^2+ax+a^2}{(x-2)^4}}_{+}(x-a)(x-2)$:

x		a		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$		$\smile$

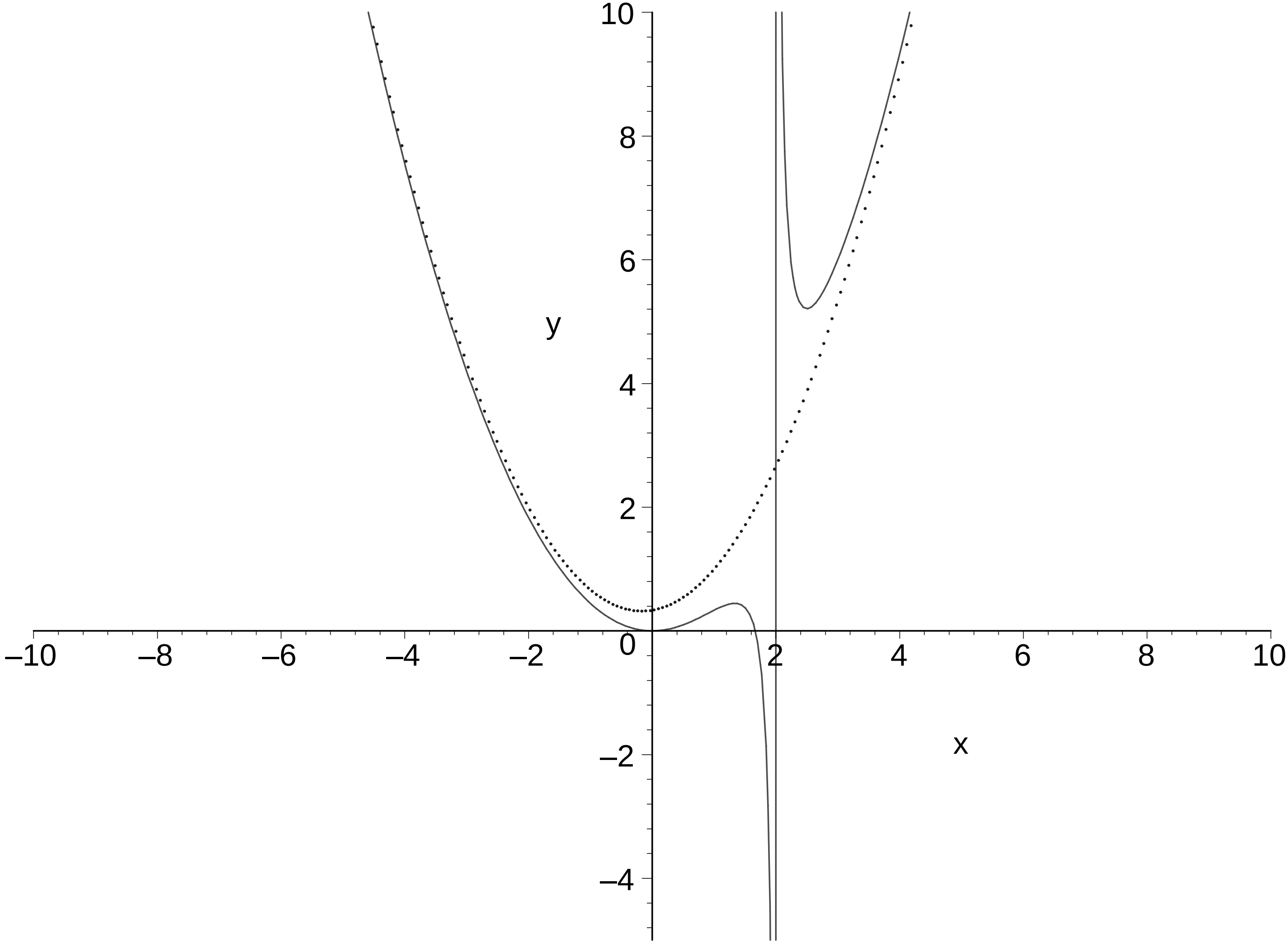
$f''(a^-)f''(a^+)<0, \Rightarrow a$ is an inflection point;

$f''(0)=0,$ so check: $f''(0^-)f''(0^+)<0, \Rightarrow$ local min. occurs at 0;

$f''(\frac{4}{3})<0, \Rightarrow$ local maximum occurs at $\frac{4}{3}$;

$f''(\frac{5}{2})<0, \Rightarrow$ local minimum occurs at $\frac{5}{2}$;

f 的圖形大致如下:



10
8
6
4
2
0
–2
–4
y
–10
–8
–6
–4
–2
2
4
6
8
10
x

Example 4 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, 我們在課堂上做過。很明顯的, f 沒有垂直漸近線。$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$, 有水平漸近線 $y=0$。

不過, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$ 不存在, 就必須另外檢驗:
假設存在直線 $y=mx+b$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$, 則

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1)=-2$, 且

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=0$,

(與前面的 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0$ 是同一個問題)

所以, 我們找到直線 $y=mx+b$ 使得 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$。$f$ 總共有兩條漸近線 $y=0$ 以及 $y=-2x$。

Example 5 $f(x)=2\sqrt{x}-x$。注意, $D_f=[0,\infty)$。很明顯的, f 沒有垂直漸近線。

假設存在直線 $y=mx+b$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$, 則

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2\sqrt{x}}{x}-1)=-1$, 且

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-{\scriptstyle(-1)}x)=\lim\limits_{x\to\infty}2\sqrt{x}=+\infty$, 不存在,

也就是說, 找不到任何直線 $y=mx+b$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$。

所以 f 沒有任何漸近線。

注意, 求斜漸近線的方法也透露著一個重要觀念:

假如 f 在 $+\infty$ 處有漸近線 $y=mx+b$, 則 斜率 m, 等於 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, 是 $f'(x)$ 在 $+\infty$ 的值, 也就是說, $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)$, 就像是用了 *L'Hôpital Rule* 一樣。