淡江大學 95 學年度第 1 學期　期中考試命題紙

考試科目: 微積分	開課班別: 化學一				命題教授簽章:
考試日期: 11 月14日 (二) 第 4 節	准帶項目打 ◯, 否則打 ×				
本試題共3頁, p.1 印刷份數 128 份	計算機	課本	筆記	字典	(V) 放大成 **B4**、單面印刷 以便計算
備註: 在本試卷上做答	×	×	×	×	

微積分 **I**, 學號__________　座號____　姓名____________　分數____

除是非、填空題外, 每道題必須整齊列出有效之計算、推導式子於給定空白處方予計分。不依指示做答者該題 0 分。
若 f 是一個函數, 則 f' 是指 對 f 的自變量求導, "漸近線" 不特定爲曲線、直線。

1. 是非題 下列陳述, 若正確塡 **Y**, 否則塡 **N** 於格子內, 不得超出。全部猜一樣以零分計算。
   - 任何函數只要將定義域限制得當 ($\neq$空集合), 皆存在反函數。 .... 取一點不就好了? .... $\boxed{\text{Y}}$
   - 任兩個函數 f, g 的合成 $f \circ g$ 一定都有定義且存在。 .... $R_f \cap D_g = \emptyset$ 怎麼辦? .... $\boxed{\text{N}}$
   - 若 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在, 則此極限必然等於 $f(a)$。............ 又沒說 f 在 a 連續 .... $\boxed{\text{N}}$
   - 函數 f 在 $-\infty$ 若有漸近線, 可能在 $-\infty$ 也有其他漸近線。............ f是函數耶, 拜託! .... $\boxed{\text{N}}$
   - 可微者其導數 (derivative) 不一定連續。............ 導數的定義就已說明此事 .... $\boxed{\text{N}}$
   - f 在 開區間 I 上可微, 且在 I 上 $f' \neq 0$, 則 f 在 I 上有 local extremum。.... f嚴格↗ 或 f嚴格↘.... $\boxed{\text{N}}$
   - 若 $f'(b) = 0$, 則 f 必然有極値發生在 b 處。............ 沒什麼好說的 .... $\boxed{\text{N}}$
   - 若二次可微的函數 f 在 c 處改變凹凸性, 則 $f''(c) = 0$。............ f'' 的連續性、中間值定理 保證此事 .... $\boxed{\text{Y}}$
   - 若函數 f 在區間 I 上可微 且 不改變凹凸性, 則 f' 在 I 上嚴格遞增 或 在 I 上嚴格遞減。若 f 是直線呢? $\boxed{\text{N}}$
   - 若 $f''(d) = 0$, 則 d 必爲 f 的反曲點。............ $f''(d^-)$、$f''(d^+)$ 未必反號 .... $\boxed{\text{N}}$

2. 填空題 • 若 $a, b > 0$, 則定可將 a 寫成 $a = b^*$, 然後我們將 $*$ 記爲 $\boxed{\log_b a}$。寫 $\frac{\log a}{\log b}$、$\frac{\ln a}{\ln b}$, 等於是用沒說明的定義來解釋定義, 邏輯有問題。
   - "函數 $f(x)$ 在 a 的 極限值爲 L" 定義爲 : 對於任意的 $\varepsilon > 0$, 可找到對應的 $\delta > 0$,
     使得 凡是落在這個範圍的 x : $\boxed{0 < |x - a| < \delta}$, $f(x)$ 會落在這個範圍裡頭 : $\boxed{|f(x) - L| < \varepsilon}$ 。
   - 函數 f 在 a 連續, 即 $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = f(a)$。
   - $\frac{d}{dx}[f(x)] \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{y\to x} \boxed{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}, = \lim\limits_{h\to 0} \boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$。
   - 基本的 derivatives $\frac{d}{da}[f]$:

$f(a)$	a^b	$log_b a$	b^a	$\sin a$	$\cos a$	$\tan a$	$\cot a$	$\sec a$	$\csc a$
$f'(a)$	$b \cdot a^{b-1}$	$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\ln b}$	$\ln b \cdot b^a$	$\cos a$	$-\sin a$	$\sec^2 a$	$-\csc^2 a$	$\sec a \cdot \tan a$	$-\csc a \cdot \cot a$

   - 一個有理式 在 $-\infty$ 及 $+\infty$ 的漸近線 總共有 $\boxed{1}$ 條。
   - 已知

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

, 且 $p := f \circ g,\ q := g \circ f,\ u := f \circ f,\ v := g \circ g$, §3.6#55

則 $p'(1) = \boxed{30}$, $q'(1) = \boxed{36}$, 如: $p'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(2) \cdot 6 = 5 \cdot 6$

$u'(2) = \boxed{20}$, $v'(3) = \boxed{63}$.

3. $\frac{d}{dx}\left[\frac{1+\sin x}{x+\cos x}\right]$ §3.5#10

$$= \frac{(1+\sin x)' \cdot (x+\cos x) - (1+\sin x) \cdot (x+\cos x)'}{(x+\cos x)^2} \quad +2$$

$$= \frac{\cos x(x+\cos x) - (1+\sin x) \cdot (1-\sin x)}{(x+\cos x)^2} \quad +2$$

$$= \frac{\cos x(x+\cos x) - \cos^2 x}{(x+\cos x)^2} \quad \downarrow$$

$$= \frac{\cos x \cdot x}{(x+\cos x)^2} \quad +1$$

4. 不用 L'Hôpital rule, 求 $\lim_{x\to0}\left[\frac{\cos x-1}{\sin x}\right]$ §3.5#38

$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{\cos x-1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x+1}\right] \quad +2$$
$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{\cos^2 x-1}{\sin x(\cos x+1)}\right]$$
$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{-\sin^2 x}{\sin x(\cos x+1)}\right] \quad +1 \text{ (到此累計 3 分)}$$
$$= \lim_{x\to0}\left[\frac{-\sin x}{\cos x+1}\right] \quad +1 \text{ (到此累計 4 分)}$$
$$= \frac{0}{1+1} = 0 \quad +1$$

5. 若 $y=\cot^2(\sin x)=(f\circ g\circ h)(x)$, 寫出函數 f,g,h : §3.6#41

$\underset{(f\text{ 用 }g\text{ 表示})}{f(g)=}$ $\underline{g^2\ (+1)}$, $\underset{(g\text{ 用 }h\text{ 表示})}{g(h)=}$ $\underline{\cot h\ (+1)}$, $\underset{(h\text{ 用 }x\text{ 表示})}{h(x)=}$ $\underline{\sin x\ (+1)}$,

並 求出 $\frac{dy}{dx}$ (結果僅用 x 表示) :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dh}\cdot\frac{dh}{dx}$$
$$=2g\cdot(-\csc^2 h)\cdot\cos x \quad +1+1+1$$
$$=-2\cot(\sin x)\cdot\csc^2(\sin x)\cdot\cos x \quad +1$$

6. 若 x,y 滿足 $x^2y^2+x\sin y=4$ 的關係, 求 $\frac{dy}{dx}$。 §3.7#11

$$\overset{d}{\Longrightarrow}\ 2x\cdot dx\cdot y^2+x^2\cdot 2y\cdot dy+dx\cdot\sin y+x\cdot\cos y\cdot dy=0 \quad +1+1$$
$$(2xy^2+\sin y)\cdot dx+(2x^2y+x\cos y)\cdot dy=0 \quad +2$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(2xy^2+\sin y)}{(2x^2y+x\cos y)} \quad +1$$

7. 若 x,y 滿足 $9x^2+y^2=9$ 的關係, §3.8#29

- 求 $\frac{dy}{dx}$。

$$\overset{d}{\Longrightarrow}\ 18x\cdot dx+2y\cdot dy=0 \quad +1$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{y} \quad +1$$

- 求 $\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}$。

令 $u:=\frac{dy}{dx}$, 即 $uy+9x=0$. 由此可得 du,dx 的關係式。

$$\overset{d}{\Longrightarrow}\ du\cdot y+u\cdot dy+9dx=0 \quad +1$$
$$du\cdot y+u\cdot u\cdot dx+9dx=0 \quad +1$$
$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}=-\frac{u^2+9}{y}=\frac{-\frac{81x^2+9y^2}{y^2}}{y}=\frac{-81}{y^3} \quad +1$$

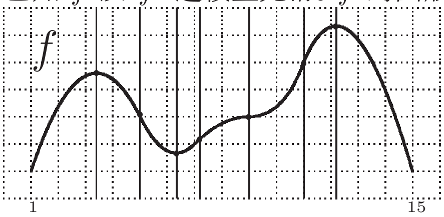
8. 以 *linearization* 方法 估計 $\sqrt{99.8}$ 。不取近似值, 寫出所有有效位數。 §3.10 #35

令 $f(x):=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ (+1),

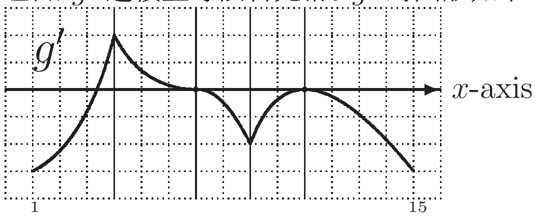
則 當 $x\approx100$ 時, $f(x)\approx f(100)+f'(100)(x-100)$ (+2),

$f(99.8)=10+0.5\frac{1}{10}(-0.2)=9.99$ (+2)

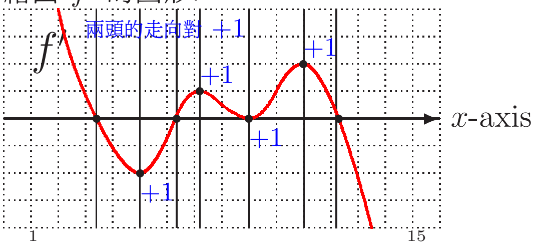
9. 已知 f 及 f' 連續且光滑。f 的圖形如下:



已知 g' 連續且每段皆光滑。g' 的圖形如下:

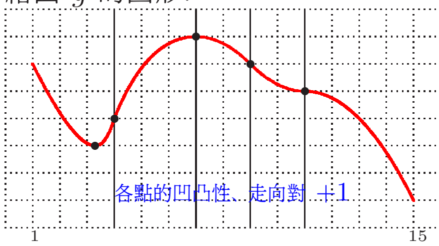


繪出 f' 的圖形:



答案必須與原圖吻合!

繪出 g 的圖形:



10. $f(x) = \sqrt{9x^2 + x}$ 有無漸近線? 有則全部求出來, 無則證明無。 §4.4#21

很明顯地, f 在 $\pm\infty$ 沒有水平漸近線。

若 f 在 $-\infty$ 處有斜漸近線 $y = mx + b$, 則

則 $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (-\sqrt{9 + \frac{1}{x}}) = -3$, (+2)

$\Rightarrow b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{9x^2 + x} + 3x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(\sqrt{9x^2+x}-3x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{(\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3)} = \frac{-1}{6}$, (+3)

類似地, f 在 $+\infty$ 處有斜漸近線 $y = mx + b$, 其中 $m = 3$ (+3), $b = \frac{1}{6}$ (+3)

11. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$。依照下列步驟 求 f 極值及發生處、反曲點, 並依所給的刻度尺寸, 畫出 f 的圖形 (要看得出 極值及發生處、反曲點) §4.3 #33

- $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15(x+1)^1(x-0)^2(x-1)^1$　　critical points: $-1, 0, +1$ (+3)

- $f''(x) = 60x^3 - 30x = 60(x + \frac{1}{\sqrt{2}})^1(x-0)^1(x - \frac{1}{\sqrt{2}})^1$　　反曲點: $\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{+1}{\sqrt{2}} \approx .7071067810$ (+3)

極值: $\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ local maximum 在 -1 處發生 (+1), 值爲 $f(-1) = 5$ (+1)

(0 既爲 反曲點, 必然不是極值發生處)

$\begin{cases} f'(+1) = 0 \\ f''(+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ local minimum 在 $+1$ 處發生 (+1), 值爲 $f(+1) = 1$ (+1)