$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

稱爲 a *differential equation of first order* (一階微分方程)。如果 (1) 可以被寫成

$$a(x)\,dx + b(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

則微分方程 (1) 稱爲 *separable*. 例如, 所謂 *autonomous* 微分方程, 即 型如 $\dfrac{dy}{dx} = g(y)$ $\left(\frac{dy}{dx} \text{ 與 } x \text{ 無關}\right)$ 的微分方程, 也是 separable。在此我們僅討論 如何解 separable 微分方程。假定所給的方程可以被寫成 (2), 如果能找到 $A(x)$、$B(y)$ 使得

$$\begin{aligned} d(A_{(x)}) &= a(x)\,dx, \\ d(B_{(y)}) &= b(y)\,dy, \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} & a(x)\,dx + b(y)\,dy = 0, \\ \iff\ & d(A_{(x)}) + d(B_{(y)}) = d(c_1),\ \ c_1\text{: any constant} \\ \iff\ & d(A_{(x)} + B_{(y)}) = d(c_1) \\ \iff\ & A(x) + B(y) = c_1 + c_2,\ \text{即 } A(x) + B(y) = c \text{ 爲 (2) 的解。} \end{aligned}$$

從 $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ 找 $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$ 的步驟 即是所謂的 *indefinite integral* (不定積分), $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$ 稱爲 $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ 的 *anti-derivative*。

$$F(x) \underset{\int[\ ]dx}{\overset{\frac{d}{dx}[\ ]}{\rightleftarrows}} f(x)$$

$$\text{若 } \tfrac{d}{dx}[F(x)] = f(x),\ \text{則定義 } \int f(x)\,dx \ (\text{即 } \int d[F(x)]) \overset{\text{def}}{=} F(x) + c.$$

所以, 在忽略 常數差 的情形下, $\begin{matrix} \int[\ ]dx \\ \int \end{matrix}$ 一般視爲 $\begin{matrix} \frac{d}{dx}[\ ] \\ d \end{matrix}$ 的逆運算, 反之亦然。上式之詳細說明如下:

$$F(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}[\ ]} f(x) \xrightarrow{\int[\ ]dx} F(x) + c,$$

$$f(x) \xrightarrow{\int[\ ]dx} F(x) + c \xrightarrow{\frac{d}{dx}[\ ]} f(x);$$

$$F(x) \xrightarrow{d[\ ]} dF = f(x)\,dx \xrightarrow{\int[\ ]} F(x) + c,$$

$$dF = f(x)dx \xrightarrow{\int[\ ]} F(x) + c \xrightarrow{d[\ ]} dF = f(x)dx.$$

用土話來說, d 把整塊的切碎 (to differentiate), $\int$ 把碎塊加起來 (to sum)。無論你在哪兒切豆腐, 豆腐份量也不會減少的。所以 不需要學過微積分, 應該就知道:

1, 函數的微變化量 的總和 就是 總變化量。
2, 函數無論如何平移, 平移之後的總變化量 是不會變的。

$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y) \text{ 的解曲線族 必定與 } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{f(x,y)} \text{ 的解曲線族 正交 — 求 } \textit{orthogonal trajectory} \text{ 是一常見的問題。}}$

例如, 兩軸固定比例的 *ellipse* 族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2\ \forall c \in \mathbb{R}$, $\iff$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2 x}{a^2 y}$, 必定與 $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$ 的解曲線族正交, 不會是其他族。而 $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$, $\iff$ $\frac{dy}{y} = \frac{a^2}{b^2}\frac{dx}{x}$ $\iff$ $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{x}$, $\iff$ $\ln|y| = \frac{a^2}{b^2}\ln|x| + c_1$, $\iff$ $y = c_2|x|^{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)}\ \forall c_2 \in \mathbb{R}$, 固定次方的 *power function* 族。