- **[Area]** 令 R 爲 $y=f(x), y=g(x), x=a, x=b$ 所封閉的區域 $(a<b)$。則 R 的面積爲 $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$。如果明確知道 f 在 g 哪裡相交, 絕對值就可以拆開了。

- **[Arc Length]** 令 s 爲 參數曲線 $\vec{\mathbf{r}}(t)=(x(t),y(t))$ $\begin{array}{l} 從\ A=(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0)) \\ 到\ B=(x_1,y_1)=(x(t_1),y(t_1)) \end{array}$ 的弧長。

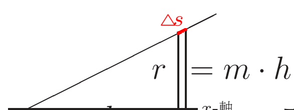
  小段弧長 $\triangle s \approx \|\triangle\vec{\mathbf{r}}\| = \sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}$, $\xrightarrow{變小}$ 微弧長 $ds=\|d\,\vec{\mathbf{r}}\|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, 則

$$\overset{\frown}{AB}\ 弧長 = \int_{\overset{\frown}{AB}} ds = \int \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \begin{cases} \displaystyle\int_{t=t_0}^{t=t_1} \sqrt{(\tfrac{dx}{dt})^2+(\tfrac{dy}{dt})^2}\,dt \\ \displaystyle\int_{x=x_0}^{x=x_1} \sqrt{1+(\tfrac{dy}{dx})^2}\,dx\ (視情況而定 — \tfrac{dy}{dx}存在否) \\ \displaystyle\int_{y=y_0}^{y=y_1} \sqrt{(\tfrac{dx}{dy})^2+1}\,dy\ (視情況而定 — \tfrac{dx}{dy}存在否) \end{cases}$$

  (想想看: 若曲線 從 t_0 到 t_1 有交叉, 能這麼算嗎?) 一般, 參數曲線 $\vec{\mathbf{r}}(t)\in\mathbb{R}^n$ 的 微弧長 $ds=\|d\,\vec{\mathbf{r}}\|$。

- **[Volume of Cones]** 令 R 爲 平面 P 上一區域。所謂錐體 C, 是 R 的任意點和 P 外固定一點o 的所有連結線段所構成的集合。令 $\begin{array}{l} A=R\ 的面積 \\ H=點o\ 到\ 平面P\ 的距離 \end{array}$, 則在 h 處的截面積爲 $\frac{h^2}{H^2}A$, 所以

$$vol(C)=\int_0^H \tfrac{h^2}{H^2}A\,dh=\tfrac{1}{3}AH。$$

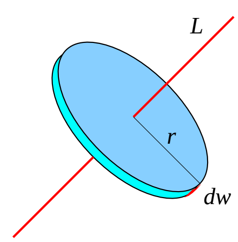
- **[Surface Area of Cones]** 

 在斜率爲 m 的線上, 取一小段 對 x-軸旋轉, 其中小段長爲 $\triangle s=\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}$, $\frac{\triangle y}{\triangle x}=m$, $|r|$ 爲 該小段 繞 x-軸 轉的半徑, 則其劃出來的 小圓帶 爲 圓錐的一部分, 而錐面 攤開來的角度是 $\theta=\frac{2\pi|r|}{\sqrt{h^2+r^2}}=\frac{2\pi|m|}{\sqrt{1+m^2}}$, 所以 小圓帶面積 = 大扇 − 小扇 = $\frac{\theta}{2}\left((\sqrt{h^2+r^2}+\triangle s)^2-(\sqrt{h^2+r^2})^2\right)=\frac{\theta}{2}(2\sqrt{h^2+r^2}\triangle s+\triangle s^2)\approx 2\pi|r|\triangle s\left(=2\pi|r|\sqrt{1+m^2}\triangle x\right)$。

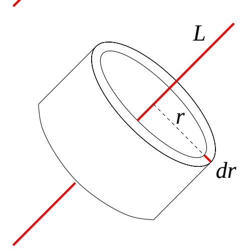
- **[Surface Area]** 函數 f 在 x 處, 其微弧長 $ds=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ 繞 $y=y_0$ (旋轉半徑爲 $|f(x)-y_0|$) 所劃出的小圓帶面積 $\approx 2\pi|f(x)-y_0|\,ds$, 並且 所以函數 f 在 $[a,b]$ 的圖形 繞 $y=y_0$ 所劃出的曲面面積爲 $\displaystyle\int_a^b 2\pi|f(x)-y_0|\,ds=\int_a^b 2\pi|f(x)-y_0|\,\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$

- **[Volume of Revolutions]** 要算旋轉體體積, 就得知道 旋轉軸 L 爲何。依據旋轉體的對稱性, 選擇適合的切割方式, 就不必記什麼「shell」、「disc」:

  在 L 某處, 半徑爲 r、厚度爲 dw、中心與 L 正交的圓盤 體積爲 $\pi r^2\,dw$, 這樣的圓盤沿著對稱軸加起來: $\displaystyle\int \pi r^2\,dw$。



  以 L 爲軸, 半徑爲 r、高爲 h、厚度爲 dr 的圓柱殼 體積爲 $2\pi rh\,dr$, 這樣的圓柱殼從對稱軸由內而外層層加起來: $\displaystyle\int 2\pi rh\,dr$。



令 R 爲 $y=f(x), y=y_0, x=a, x=b$ 所封閉的區域 $(a<b)$。
R 繞 水平軸 $y=y_0$ 的旋轉體(實心的)體積爲 $\displaystyle\int_a^b \pi\big(f(x)-y_0\big)^2\,dx$;
R 繞 鉛直軸 $x=x_0$ (不通過 R) 的旋轉體(空心的)體積爲 $\displaystyle\int_a^b 2\pi|x-x_0||f(x)-y_0|\,dx$。

- **[Average]** 講 Riemann Sum 時已經推導過了, 並且說過目測的方法。avg $=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$。令 F 爲 f 的 anti-derivative, 根據 *Mean Value Theorem*, 存在一個 $c\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$, 由此可知, $f(c)=$ avg。

- **[Center of Mass, Centroid]** 無疑地, 物體的總質量 爲 微質量的總合 $M=\displaystyle\int dm$。若將物體切割成小塊, 微質量 dm 視爲質點, 以原點o爲支點, 每一質點 dm 對支點的力矩, 是爲 支點 o 到該質點的向量 $\vec{\mathbf{r}}$ 乘上 質點的質量, 即 $\vec{\mathbf{r}}\,dm$; 質量中心 (center of mass, 質心、重心) $\vec{\mathbf{c}}$ 的意義, 就是 “物體的總力矩代表處” —— 質量爲 M 的質點 置於 $\vec{\mathbf{c}}$ 處 所產生的力矩 相當於 微質量產生的力矩之總和, 即 $\vec{\mathbf{c}}M=\displaystyle\int \vec{\mathbf{r}}\,dm$ 。

  如果 物體的密度均匀 (即密度處處相同), 則 質心即圖心 (centroid)。以上論述與維度無關。

  二維時, 若取 $\vec{\mathbf{r}}=(x,y)$, 則質心 $\vec{\mathbf{c}}=(\bar{x},\bar{y})=\frac{\int\vec{\mathbf{r}}\,dm}{M}=\frac{\int(x,y)\,dm}{M}=\left(\frac{\int x\,dm}{M},\frac{\int y\,dm}{M}\right)$, i.e. $\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\int x\,dm}{\int dm},\\[2ex] \bar{y}=\dfrac{\int y\,dm}{\int dm}\end{cases}$。

  令 R 爲 $y=f(x), y=g(x), x=a, x=b$ 所封閉的區域,面積爲 $A=\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$。將 R 作垂直**條狀切割** (這時的所謂的微質量爲 $dm=|f(x)-g(x)|\,dx$, 和切割方式有關), 則
  $$\begin{cases}\bar{x}=\displaystyle\int_a^b \underbrace{x}_{\text{力臂}}\underbrace{\big|f(x)-g(x)\big|\big)\,dx}_{dm}\Big/A,\\[3ex] \bar{y}=\displaystyle\int_a^b \underbrace{\frac{f(x)+g(x)}{2}}_{\text{力臂}}\underbrace{\big|f(x)-g(x)\big|\,dx}_{dm}\Big/A.\end{cases}$$

- **[Inertia]** 將某物體細分爲質點, 質點 dm 到某旋轉軸 L 的距離爲 r, 質點 dm 對 L 軸旋轉的轉動慣量定義爲 $r^2\,dm$, 則物體對 L 軸旋轉的轉動慣量爲 $\displaystyle\int r^2\,dm$ 。以上論述與維度無關。

以上所提到的

- 微質量 $dm=\rho(\vec{\mathbf{r}})\,dV$, 密度 $\times$ 微體積, 係由 切割方式 $\Rightarrow$ 座標系 決定,
- 位置向量 $\vec{\mathbf{r}}$, 由 切割方式 $\Rightarrow$ 座標系 決定,
- 半徑 r, 由旋轉軸、切割方式 $\Rightarrow$ 座標系 決定,

$\displaystyle\int$ 意爲加總, 並非專指單積分。最關鍵的是 如何依物體特性決定切割方式。這個問題到“重積分”時會進一步探討。