再談 Anti-derivative/Indefinite Integral

- 定義: F is an *anti-derivative* of f 即 $\frac{dF}{dx} = f$。The *indefinite integral* of f, 記作 $\int f\,dx$, 也是 anti-derivative of f 的意思, 這是定義, 不爲什麼。

  我們知道 如果 $\frac{dF}{dx} = f$, 則 $F_1 := F + c$ 同樣也是 anti-derivative of f。所以一個函數對應的 anti-derivative 有無窮多個, 但是他們之間只有 加/減 一個常數的差異而已。所以 anti-derivative 也可以這樣寫: $\int f\,dx = F + c = F_1$。即, 在不考慮 加/減 常數的情況下, 我們可以視

  $$F \underset{\int (\ )\,dx}{\overset{\frac{d}{dx}(\ )}{\rightleftarrows}} f$$

  爲可逆的運算。

- 無論是微分 還是積分 都必須說明 究竟是對哪個變量來做的。對於單變量函數 f 而言,

  符號 : $\frac{df}{dx}$ — derivative of f with respect to x, $\int f\,dx$ — anti-dervative of f with respect to x, 因爲 f 的變量可以不同於微分/積分的變量,

  所以務必要寫清楚! $\boxed{\text{如果沒有特別明示變量,} Df \text{ 的意思就是 } \frac{d}{d\spadesuit}f(\spadesuit),\ \int f \text{ 的意思就是 } \int f(\spadesuit)\,d\spadesuit\text{ 。}}$

  因爲 D 是線性算子, 所以在不考慮 加/減 常數的情況下, $\int$ 是線性算子, 即 $\begin{array}{l}\int(f+g) = \int f + \int g \\ \int(cf) = c\int f\end{array}$ 。類似地, 無論 加/減 常數與否, $\int_a^b$ 當然是線性算子。

- $f'(x)\,dx = \frac{df}{dx}\,dx = df, \Longrightarrow \int f'(x)\ dx = \int \frac{df}{dx}\,dx = \int df = f(x) + c$. 在不考慮 加/減 常數的情況下, 我們可以視

  $$\underset{\text{to integrate (合併)}}{f} \underset{\int}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \overset{\text{to differentiate (細分)}}{df}$$

  爲可逆的運算。

  所有的積分技巧, 都是來自微分的經驗。例如, 所謂的 *integration by part*(分部積分): $d(uv) = du\,v + u\,dv \Longrightarrow \int d(uv) = uv = \int v\,du + \int u\,dv \iff \int u\,dv = uv - \int v\,du$, 就是從 *product rule* 來的。

- Integration by part 的目的 在於 轉化問題 — 希望 新得到的積分式子 更爲簡單。所以, 考慮 $\int$ 裡頭 誰當 "u"、誰當 "dv" 的原則爲: 使下次 $\int$ 裡頭的 "$v\,du$" 不會變得更複雜。(你一定要把 "$v\,du$" 算出來, 否則就變成這樣: $\int u\,dv = uv - \int v\,du = uv - (vu - \int u\,dv) = \int u\,dv$, 又回到原來的問題, 什麼也沒解決。)

  另外提供一點經驗: 我們常把 integrant 裡頭多項式乘法的部分當 "u", 因爲 "du" 後會使其階數降低; 也常把 指數函數 b^{ax}(a、b 爲常數) 的部分當 "u", 因爲 $d(\boxed{b^{ax}}) = \underbrace{a\ln b}_{\text{常數}}\cdot\boxed{b^{ax}}\,dx$, 即 "$du$" 不會帶來麻煩; 如果多項式和指數函數同時出現, 則以多項式的部分當 "u" ...... 不過, 這不是什麼金科玉律, 還得視情況而定。

eg. $\int x^2 a^x\,dx \;= \int (x^2)(a^x\,dx) = \frac{1}{\ln a}\int x^2 d(a^x)$
$= \frac{1}{\ln a}[x^2a^x - \int a^x 2x\,dx]$
$= \frac{1}{\ln a}\left[x^2a^x - \frac{2}{\ln a}\int x d(a^x)\right]$
$= \frac{1}{\ln a}\left[x^2a^x - \frac{2}{\ln a}\left(xa^x - \int a^x\,dx\right)\right]$
$= \frac{1}{\ln a}\left[x^2a^x - \frac{2}{\ln a}\left(xa^x - \frac{1}{\ln a}a^x\right)\right]$
$= a^x\left[\frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{(\ln a)^2} + \frac{2}{(\ln a)^3}\right]$

- 在做 chain rule 的時候, 我們就用了所謂的 substitution, 積分時也不例外。Substitution 除了簡略式子、便於觀察外, 最有用的 還是在於轉化問題。有一個原則: 你若想把積分裡頭的某個式子叫做 u, 就要看看整個的積分式子 完全用 u 表示後 是否變簡單、能解決了。(如果不能輕易地用 u 表示, 大多意味著式子將變得更複雜。)

  eg. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$,

  若令 $u := e^{\sqrt{x}}$, 則 $du = \frac{1}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$, $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int \sqrt{x}\,du = \int \ln u\,du$ — 再以 integration by part 解決。

  若令 $u := \sqrt{x}$, 則 $du = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int ue^u\,2\,du = \int 2ue^u\,du$ — 再以 integration by part 解決。

  若直接用 integration by part, 則 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = e^{\sqrt{x}}\cdot x - \int x\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}x - \frac{1}{2}\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$, 更討厭了。

- 其他積分技巧, 必須具備若干基本知識:

  一, 實係數二次多項式的配方 — $ax^2+bx+c = a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = *(x-*)^2 + *$;
  二, 實係數分式 (有理式), 可以分解成 $\frac{*}{(x-*)^n}$、$\frac{*}{(*(x-*)^2+*)^n}$ 類型的和;
  三, 實係數多項式, 可以分解成 $(x-*)$、$(*(x-*)^2+*)$ 類型的乘積;
  四, 三角函數的和、分角、倍角公式 —— 可由 $i \overset{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$, $e^{it} = \cos t + i\sin t$ (*Euler* 公式) 很容易導出。

  例如, $(e^{it})^3 = e^{i3t} = \cos 3t + i\sin 3t$,
  即 $(\cos t + i\sin t)^3 = \cos^3 t + 3\cos^2 t\,i\sin t + 3\cos t\,i^2\sin^2 t + i^3\sin^3 t$
  $= (\cos^3 t - 3\cos t\sin^2 t) + i(3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t)$。
  所以 實部 $\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t\sin^2 t = 4\cos^3 t - 3\cos t$,
  虛部 $\sin 3t = 3\cos^2 t\sin t - \sin^3 t = 3\sin t - 4\sin^3 t$。

  也可以這樣導: $\sin^3 t = (\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i})^3$
  $= \frac{e^{i3t}-3e^{i2t}e^{-it}+3e^{it}e^{-i3t}-e^{-i3t}}{-8i}$
  $= \frac{e^{i3t}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-i3t}}{-8i}$
  $= \frac{3e^{it}-3e^{-it}}{2i\cdot 4} - \frac{e^{i3t}-e^{-i3t}}{2i\cdot 4}$
  $= \frac{3\sin t - \sin 3t}{4}$

  $\therefore \int \sin^3 t\,dt = \frac{3}{4}\int \sin t\,dt - \frac{1}{4}\int\sin 3t\,dt$
  $= \frac{-3}{4}\cos t + \frac{1}{12}\cos 3t$
  雖然這個做法本身不算高明,
  只是爲了說明不必背公式罷了。

  $\sin^4 t = (\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i})^4$
  $= \frac{e^{i4t}-4e^{i3t}e^{-it}+6e^{i2t}e^{-i2t}-4e^{it}e^{-i3t}+e^{-i4t}}{(2i)^4}$
  $= \frac{e^{i4t}-4e^{i2t}+6-4e^{-i2t}+e^{-i4t}}{16}$
  $= \frac{e^{i4t}+e^{-i4t}}{16} - \frac{e^{i2t}+e^{-i2t}}{4} + \frac{6}{16}$
  $= \frac{\cos 4t}{8} - \frac{\cos 2t}{2} + \frac{3}{8}$

  $\therefore \int \sin^4 t\,dt = \frac{1}{8}\int\cos 4t\,dt - \frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt + \frac{3}{8}t$
  $= \frac{1}{32}\sin 4t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{3}{8}t$

  五, $\int \sin^m\cos^n\ (m,n \geq 0)$ 的類型: m,n 至少一個爲奇數時很簡單, 只要將基數次方的那個拿一次方進 d, 然後把留在 d 外的剩餘偶次方改成另一個即可, 如 $\int\sin^m x\cos^3 x\,dx = \int\sin^m x\cos^2 x\,d(\sin x) = \int\sin^m x(1-\sin^2 x)\,d(\sin x) = \int \spadesuit^m(1-\spadesuit^2)\,d\spadesuit = \cdots$, 根本就不必記什麼倍角公式。

m, n 皆爲偶數時, 如果用 *integration by part* 來做就比較複雜, 相當於 $\displaystyle\int \sin^{偶}$ 或 $\displaystyle\int \cos^{偶}$ 的情況, 如: $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^2 x(1-\cos^2 x)\,dx = \int \sin^2 x\,dx - \int \sin^4 x\,dx$. 下面有幾個例子:

1. $\int \sin^2 x\,dx = -\int \sin x\,d(\cos x) = -\sin x\cos x + \int \cos x(\cos x\,dx) = -\sin x\cos x + \int(1-\sin^2 x)dx = -\sin x\cos x + \int 1\,dx - \int \sin^2 x\,dx, \cdots$
2. $\int \sin^4 x\,dx = -\int \sin^3 x\,d(\cos x) = -\sin^3 x\cos x + \int \cos x(3\sin^2 \cos x\,dx) = -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)dx = -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2\ dx - 3\int \sin^4 x\,dx, \cdots$
3. $\int \sin^6 x\,dx = -\int \sin^5 x\,d(\cos x) = -\sin^5 x\cos x + \int \cos x(5\sin^4 \cos x\,dx) = -\sin^5 x\cos x + 5\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)dx = -\sin^5 x\cos x + 5\int \sin^4\ dx - 5\int \sin^6 x\,dx, \cdots$

所以, 要算 $\int \sin^6 x\,dx$, 就得算 $\int \sin^2 x\,dx$ 、算 $\int \sin^4 x\,dx$, 挺麻煩的。

但是, 如果直接用第 (四) 點說過的 *Euler* 公式

$$\begin{aligned}
\sin^6 x &= \left(\tfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^6 \\
&= (1\,e^{i6t} - 6\,e^{i4t} + 15\,e^{i2t}\ -20\ +15\,e^{-i2t} - 6\,e^{-i4t} + 1\,e^{-i6t})/(-64) \\
&= (\cos 6t - 6\cos 4t + 15\cos 2t - 10)/(-32),
\end{aligned}$$

$\therefore \int \sin^6 x\,dx = (\frac{1}{6}\sin 6t - \frac{6}{4}\sin 4t + \frac{15}{2}\sin 2t - 10t)/(-32)$, 很乾脆。

六, 反三角函數 的 derivatives (請回去看 "Derivative & Differential" 的部分);

七, hyperbolic 函數 的 derivatives (有時間就說)。

Riemann Sum & Definite Integral

- Given $f(x), I = [a,b]$, and a partition(分割) p whch breaks I into n pieces: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. *Riemann sum* (黎曼和) is an "n-sum" defined as follows:

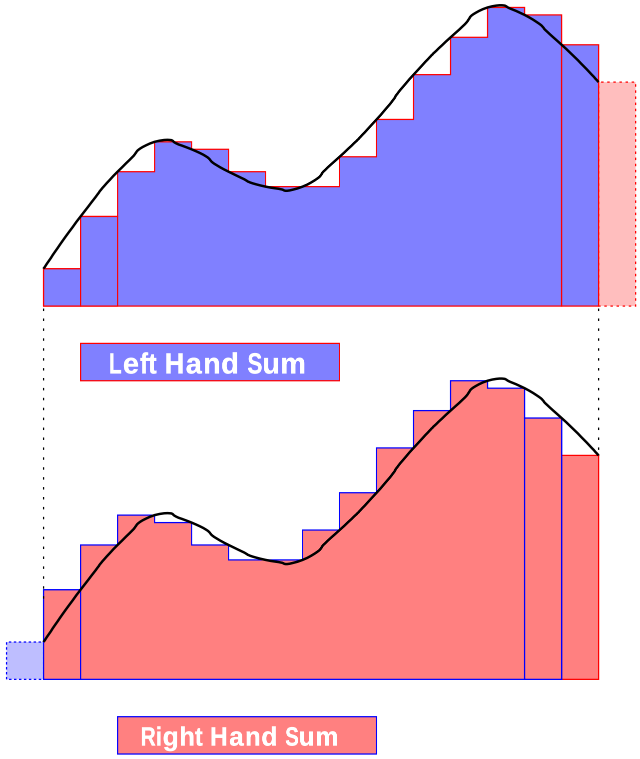
$$S_n := \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\triangle x_i$$

where $\bar{x}_i$ is arbitrarily chosen from $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, $\triangle x_i := |I_i| = x_i - x_{i-1}$. In particular,
if $\bar{x}_i := x_{i-1}$ for all i, then S_n is called the *left hand sum* L;
if $\bar{x}_i := x_i$ for all i, then S_n is called the *right hand sum* R;
if $\bar{x}_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ for all i, then S_n is called the *midpoint sum* M (note that $M \neq \frac{L+R}{2}$!!!).
" $\|p\| \to 0$ " means " $\max\limits_i |I_i| \to 0$ ".

- *Definite integral* (定積分) 是 Riemann sum 的極限 (其 極限值 不一定存在 !!!):

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\triangle x_i$$

其中 a 稱爲 *lower limit*, b 稱爲 *upper limit*, $f(x)$ 稱爲 *integrant*。如果 $\int_a^b f(x)\,dx$ 存在, 則說 f *is integrable on* $[a,b]$.



所以定積分的值 可藉由 Riemann sum 來估計, 其符號上也與 Riemann sum 吻合。大致可以這樣描述:

		和	長條形的高	長條形的寬	
黎曼和	n	$\sum_{i=1}^{n}$	$f(\bar{x}_i)$	$\triangle x_i$	n 個長條形加起來
	$\downarrow$			$\downarrow$	
定積分	∞	$\int_a^b$	$f(x)$	dx	∞ 個很細的長條形加起來

- 常聽到有人這樣說: “ $\int_a^b f(x)\,dx$ 等於 f 曲線下、x-軸上方、介於 a、b 之間的面積 ”, 這樣的 “面積” 卻是隨著 f 起伏 — 有時正、有時負, 除非 $f \geq 0$ on $[a,b]$, 否則這句話語意不清不楚, 也跟我們的習慣不符。我們如果要講 眞正的面積, 應該要用精確的方式來描述以避免混淆: 介於 a、b 之間,f 曲線 與 x-軸 所夾的 面積 爲 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$。

  如果用 Riemann sum 來估計$\int_a^b f(x)\,dx$: 將 $[a,b]$ 區間等分成 n 段 (i.e. 曲線下、x-軸上方的區域 被分成 n 條, 每條的寬度爲 $\triangle x := \frac{b-a}{n}$), 則 n 個長條的平均高度爲

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\triangle x}{n\triangle x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\triangle x}{b-a}, \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

  根據前兩點, 可以目 測函數大概的平均值:

$$\boxed{\text{橫線的高爲平均值}} \iff \boxed{\begin{matrix}\text{曲線下方}\\ \text{橫線上方}\end{matrix}\text{夾的面積} = \begin{matrix}\text{橫線下方}\\ \text{曲線上方}\end{matrix}\text{夾的面積}}.$$

- 把 $[a,b]$ 分成 n 段 ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$)。若存在 $F(x)$ 使得 $f = \frac{dF}{dx}$, 則 $F(x)$ 從 a 到 b 的總變化量 爲 $F(b) - F(a)$:

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) &= \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right], \text{ 根據 } \textit{Lagrange MVT}, \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\triangle x_i \ \text{ for some } \bar{x}_i \in (x_{i-1}, x_i) \text{ , 意即: 等於 某個 Riemann sum,} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx, \text{ 於是有 } \textit{Fundamental Theorem of Calculus} \text{ (FTC) :}\end{aligned}$$

[FTC] If F is an *anti-derivative* of f, i.e. $\frac{dF}{dx}=f$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

- 從以上得知求定積分值的兩種基本方法:
  1, 求 Riemann sum 通式後取極限 (如果無法求出通式, 只好用 Riemann sum 或其他數值方法粗略估計)。
  2, 依 FTC, 求 integrant 的 anti-derivative (if exists) 後將 upper limit、lower limit 代入求差。

  一般來說, 求 finite sum 的通式往往是很困難的。光是簡單的 finite sum 公式就已經多得記不住了! 所以 finite sum 的極限問題 常常又會被轉換成 定積分的問題,

  不過, 求 anti-derivative 也並非容易的事, 若是爲了求定積分的型式解/精確解, 大部分的情況還非得這麼做不可, 但任意函數的 anti-derivative, 型式上卻不一定求得出來。

- 一些 finite sum 公式

  1. 令 $S_n=\sum_{i=1}^n r^i$. 則 $rS_n-S_n=r^{n+1}-r$, 即 $S_n=\frac{r-r^{n+1}}{1-r}$。

  2. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \cos k\theta + i\sum_{k=1}^n \sin k\theta &= \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k = \frac{e^{i\theta}-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i\theta}-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\frac{1-e^{-i\theta}}{1-e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta}-e^{i(n+1)\theta}-1+e^{in\theta}}{2-2\cos\theta} \\ &= \frac{\cos\theta-\cos(n\theta+\theta)-1+\cos n\theta}{2-2\cos\theta} + i\,\frac{\sin\theta-\sin(n\theta+\theta)+\sin n\theta}{2-2\cos\theta},\end{aligned}$$
     $\sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\cos\theta-\cos(n\theta+\theta)-1+\cos n\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{\cos\theta-1-\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta+\cos n\theta)}{2-2\cos\theta} = \frac{\cos n\theta-1}{2}+\frac{\sin n\theta\sin\theta}{2-2\cos\theta}$,
     $\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin\theta-\sin(n\theta+\theta)+\sin n\theta}{2-2\cos\theta} = \frac{\sin\theta-\sin n\theta\cos\theta-\cos n\theta\sin\theta+\sin n\theta)}{2-2\cos\theta} = \frac{\sin n\theta}{2}+\frac{\sin\theta(1-\cos n\theta)}{2-2\cos\theta}$.

  3. 令 $S_n=\sum_{i=1}^n i$, 則 $2S_n = \begin{matrix} 1+2+\cdots+(n-1)+n \\ +n+(n-1)+\cdots+2+1\end{matrix} = n(n+1)$, 即 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

  4. $\sum_{i=1}^n (i+1)^3 = \sum_{i=1}^n (i^3+3i^2+3i+1) = \sum_{i=1}^n i^3 + 3\sum_{i=1}^n i^2 + 3\sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$,
     即 $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1)^3-1-n-3\sum_{i=1}^n i}{3} = \frac{2n^3+6n^2+6n+2-2-2n-3n^2-3n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

  5. $\sum_{i=1}^n (i+1)^4 = \sum_{i=1}^n (i^4+4i^3+6i^2+4i+1) = \sum_{i=1}^n i^4 + 4\sum_{i=1}^n i^3 + 6\sum_{i=1}^n i^2 + 4\sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$,
     即 $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{(n+1)^4-1-6\sum_{i=1}^n i^2-4\sum_{i=1}^n i-n}{4} = \frac{n^4+4n^3+6n^2+4n+1-1-2n^3-3n^2-n-2n^2-2n-n}{4}$
     $= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$。$\left(\sum_{i=1}^n i^4、\sum_{i=1}^n i^5、\cdots, \text{依此類推。}\right)$

  6. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} = 1-\frac{1}{n+1}$.

  7. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)}\right)/2 = [1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}]/2 = \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$。

  8. $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} i = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{-n}{2} & \text{if } n \text{ is even}\end{cases}$

  9. $\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} i^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

10. $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^3 = \begin{cases} \frac{(2n-1)(n+1)^2}{4} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{-n^2(n+3)}{4} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$
11. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+k) = \frac{1}{k+2}\frac{(n+k+1)!}{(n-1)!}$

- 因爲定積分是用極限定義的, 故而不是所有的定積分都存在的。

  若 integrant $f(x)$ 在 $[a,b]$ 連續 或 段段連續 (piecewisely continuous), 則定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 存在。

  假設 integrant 在 $[a,b]$ 上很好 (eg. 連續), 則對於任意的 $c \in [a,b]$, 定積分算子

  $$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b, \text{ 即 } \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$
  $$\int_b^a = -\int_a^b, \text{ 即 } \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx;$$
  $$\int_a^a = 0, \text{ 即 } \int_a^a f(x)\,dx = 0;$$ 以上從 定積分的定義 一看便知。

  萬一 integrant 不太好 (eg. 在某處極限值爲無窮), 或, 定積分範圍 unbounded, 這時候 定積分不可以隨便拆, 再次強調, 因爲定積分是用極限定義的。這樣的定積分叫做 *improper integral*(瑕積分)。

- 假裝 F 是 f 的 anti-derivative, i.e. $\displaystyle\int f = F$, 則 $\displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_{t=g(x)}^{t=h(x)} = F\big(h(x)\big) - F\big(g(x)\big)$, 所以

  $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right] = \frac{d}{dx}F\big(h(x)\big) - \frac{d}{dx}F\big(g(x)\big) = F'\big(h(x)\big)\cdot h'(x) - F'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = f\big(h(x)\big)\cdot h'(x) - f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$,
  不用眞的去求出 F。