Functions (函數)

函數 是 一個集合 至 第二個集合 元素之間 (集合類型皆不限定) 符合以下條件的 某種 對應關係：
第一集合的每個元素 必須對應至 第二集合的單一元素.
所以, 這種對應關係可能有"一對一"、"多對一", 但不會有 "一對多" 的情形。

假設 f 是一個 function。以下符號的意思是

$D_f \xrightarrow{f} R_f$ "f 是從 D_f 映射至 R_f 的函數"
$\heartsuit \xmapsto{f} \spadesuit$ "f 將 $\heartsuit \in D_f$ 映射至 $\spadesuit \in R_f$" "$\spadesuit$ 等於 f 在 $\heartsuit$ 的值"
這個最清楚、簡單：$\spadesuit = f(\heartsuit)$

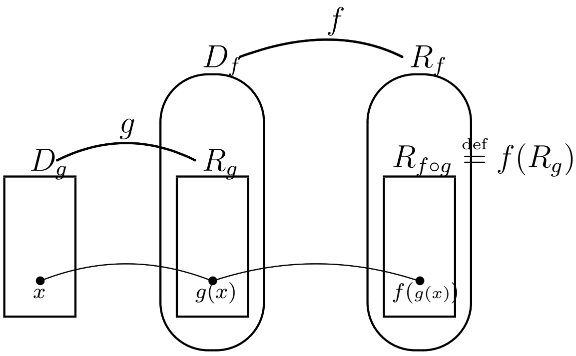
始集合 D_f 稱爲 *the domain of f*(函數 f 的定義域), 靶集合 R_f 稱爲 *the range of f*(函數 f 的值域); 依上面所說的函數定義, 必定有 $f(D_f) \subseteq R_f$ 特性。

如果沒有特別只說明, domain 指的便是一個函數可以接受的所有元素所成的集合 (即 *natural domain*), 所以, 自行選取的 domain, 必須包含於 natural domain; 如果沒有特別說明, range 指的便是 將指定的 domain 裡所有元素 以函數對應而成的集合, 即 $f(D_f)$ (*induced range*, range induced by D_f)。然而, 就算 $f(D_f) \subsetneq R_f$, 也沒有違反定義。所以, 指定 domain 後, 自取的 range 必須包含 range induced by chosen domain。

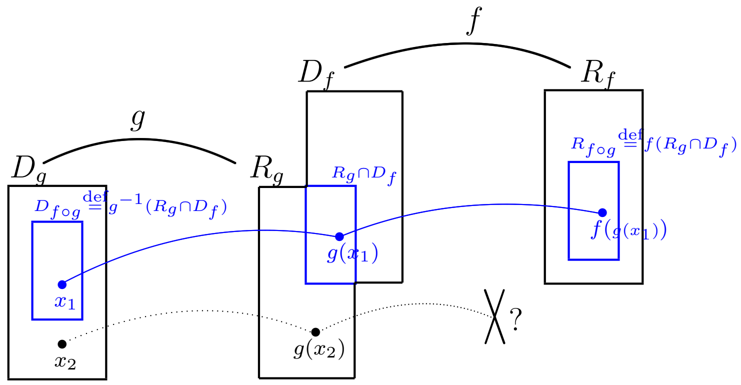
函數的圖形 就是 把每個 domain 元素連同其對應元 記成座標後 蒐集而成的集合, 即:
graph of f $:= \Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(\heartsuit, f(\heartsuit)) \,|\, \heartsuit \in D_f\}$ $(= \{(\heartsuit, \spadesuit) \,|\, \spadesuit = f(\heartsuit), \heartsuit \in D_f\}$ — 這個換名字的動作沒有多大的意義) 。
如果函數的 domain 及 range 皆包含於 $\mathbb{R}$, 便可將其圖形繪於座標平面上。

Composition of Functions (函數的合成)

已知函數 f 的 domain 爲 D_f, R_f 爲 induced range; 函數 g 的 domain 爲 D_g, R_g 爲 induced range。只有當 $R_g \subseteq D_f$ 成立時, 以 D_g 爲 domain 的合成函數 $f \circ g$ 才有定義:$(f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x))$, range 爲 $f(R_g)$。圖示如下:



換言之, 如果 $D_f \cap R_g = \emptyset$, 則 $f \circ g$ 沒有定義; 若 $R_g \not\subseteq D_f$ 且 $D_f \cap R_g \neq \emptyset$, 則 $f \circ g$ 的 domain 會比 D_g 小, range 自然隨之不同。於是, $f \circ g$ 的 domain 應爲 (見下圖示) $\{x \,|\, g(x) \in R_g \cap D_f\}$ (即 $R_g \cap D_f$ 關於函數 g 的 "pre-image"(pullback)) 所以 請特別注意, 函數合成後的 domain 和 range 並不是以 合成後的表面型式 (式子) 來決定的!



Some Rigid and Non-rigid Transformations

在熟悉若干型式較簡單的函數後, 可以用一些"剛體變換" 或 "變形變換" 來構造較複雜的函數, 或是反過來, 將較複雜的 經由某些變換"還原"至簡單型式。

對 Γ_f 做動作變成 Γ_g	**將 f 變成 g $(c>0)$**		**如何合成**	
Shifting (平移)	上(+) 下(−) 移	$g(x) := f(x) \pm c$	$h(x) = x \pm c,$	$g := h \circ f$
	左(+) 右(−) 移	$g(x) := f(x \pm c)$	$h(x) = x \pm c,$	$g := f \circ h$
Reflecting (翻)	對 x-軸 翻	$g(x) := -f(x)$	$h(x) = -x,$	$g := h \circ f$
	對 y-軸 翻	$g(x) := f(-x)$	$h(x) = -x,$	$g := f \circ h$
Stretching/Shrinking	縱向伸縮	$g(x) := cf(x)$	$h(x) = cx,$	$g := h \circ f$
伸$(c>1)$ 縮$(0<c<1)$	橫向伸縮	$g(x) := f(\frac{x}{c})$	$h(x) = \frac{x}{c},$	$g := f \circ h$

如果 f 依序經過 n 個變換後得到 g, 把這 n 個變換的次序換一換, 不一定會得到和原來一樣的 g.

f is an odd function(奇函數): $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in D_f$. 即: Γ_f 對稱於 原點。
f is an even function(偶函數): $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D_f$. 即: Γ_f 對稱於 y-軸。

Inverse Functions (反函數)

以下簡稱 x: independent variable(自變量), y: dependent variable(因變量). 將 $y = f(x)$ 解讀成 "y 可以用 x (以 f 的方式) 來表示", 自然地會問, x 能否以 y (唯一) 表示呢? ($x \underset{?}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$) 如果可以, 則該表示法稱爲 f 的反函數, 記做 f^{-1}, 它把 y "還原"至 x. 如果 f 不是 1-1, 存在不同的 x 對應到同一個 y, 即, y 的表示法不唯一, 即, 反函數不存在.

$$f \text{ has an inverse} \iff f \text{ is 1-1}$$

所以, 即使函數不是 1-1, 也可以將其 domain 適當限制後變成 1-1, 以致有 inverse.

一些 基本函數 的特性

- *Power functions* : $c, r \in \mathbb{R}$ nonzero, x is an independent variable. cx^r is called a *monomial* and $f(x) \overset{\text{def}}{=} cx^r$ is called a *power function*. Given a finite set $\mathcal{A} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathcal{A}$, then $f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathcal{A}} a_n x^n$ is called a *polynomial*(多項式).

- *Exponential functions* : $b > 0$. b^p 稱爲一個 *power*, b 爲此 power 的 *base*(底數), p 爲此 power 的 *exponent*(指數)。$b^{-p} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{b^p}$, $b^p b^q = b^{p+q}$, $\frac{b^p}{b^q} = b^{p-q}$, $(b^p)^q = b^{pq}, \cdots$. 注意, "$(b^p)^q = b^{pq}$" 只有在 $b > 0$ 時才是完全眞確; 成規: 若 $\clubsuit^p$ 的指數 p 不是整數, 則底數 $\clubsuit$ 應該 ≥ 0; 如果指數 $p < 0$, 則底數 $\clubsuit$ 應該 > 0。符號 0^0 沒有定義。

  $b > 0, f(x) \overset{\text{def}}{=} b^{kx}$ 稱爲 *exponential function*(指數函數).

- *Logarithm*(對數) : $3 = 2^*$ ("3 等於 2 的 $*$ 次方") 到底 $*$ 是多少? $*$ 大概是 1.xxx 吧, 誰也說不清楚, 只好用一個記號 $\log_2 3$ 記著 ... 所以 $3 = 2^{\log_2 3}$ 只是把剛才定的 $*$ 重寫而已 ... 若 $a, b > 0$, 我們總可以將 a 寫成 b 的 $*$ 次方 (i.e. $a = b^*$), 指數 $*$ 記爲 $\log_b a$ (i.e. $a = b^{\log_b a}$), 這是定義, 不是推導! 將 a 寫成 $b^{\log_b a}$ 的舉動叫做 *"exponentiate"*。

  $a, b, c > 0$. 若 $a = b^p$(依定義, $p = \log_b a$) 且 $b = c^q$(依定義, $q = \log_c b$), 則 $a = b^p = (c^q)^p = c^{pq}$, 依定義, $pq = \log_c a = (\log_b a)(\log_c b)$, 即 $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (*change of base formula*) .

  Natural log(自然對數): $\ln(\ ) \overset{\text{def}}{=} \log_e(\ )$, 其中 $e \approx 2.71828\cdots$, 稱爲 *natural base*, 是一個無理數, 我們在講 limit(極限) 時會定義 e 並證明其存在。注意, 若 $f(\spadesuit) \overset{\text{def}}{=} b^{\spadesuit}$, $g(\clubsuit) \overset{\text{def}}{=} \log_b \clubsuit$, 則 f, g 互爲反函數。

- *Trignometric functions*(三角函數):

  Pythagorean Identities (畢氏定理): $\begin{cases} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \iff \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \\ \iff 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \end{cases}$.

  和/分角公式: $\begin{cases} \sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi \\ \cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \end{cases}, \cdots$

  和/差化積公式: $\begin{cases} \sin\theta + \sin\phi = 2\sin(\frac{\theta+\phi}{2})\cos(\frac{\theta-\phi}{2}) \\ \sin\theta - \sin\phi = 2\cos(\frac{\theta+\phi}{2})\sin(\frac{\theta-\phi}{2}) \end{cases} \cdots$

  已知 sin 爲奇 而 cos 爲偶, 故 sec 爲偶, tan、cot、csc 爲奇。

  我們已經知道週期函數一定不是 1-1, 三角函數又是週期函數, 那三角函數又怎麼會有反函數呢? 所謂的 "反三角函數"(inverse trig function), 實際上是 原三角函數 經限制成爲 1-1 函數後 的 反函數。例如, arcsin 是 $\sin\theta\Big|_{[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}]}$ 的反函數, arccos 是 $\cos\theta\Big|_{[0,\pi]}$ 的反函數,$\cdots$。至於選哪段, 是成規, 不爲什麼。