“ finite sum 的 limit $\rightleftharpoons$ 定積分” 練習

- 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}$。

$$(sol.)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{j}{n}}\ \begin{aligned}&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2\\ \text{或}\ &=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_1^2=\ln 2\end{aligned}\qquad\square$$

- 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}$。

$$(sol.)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\qquad\square$$

- 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。

$(sol.)$ 令 $a_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, 原本要求的是 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$, 不過 $\displaystyle\ln(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}\ln(a_n)$ 比較好處理:

$$a_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\left(\frac{1\cdot 2\cdots n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}},\ \ln(a_n)=\tfrac{1}{n}(\ln\tfrac{1}{n}+\ln\tfrac{2}{n}+\cdots\ln\tfrac{n}{n}),$$

就是 $\displaystyle\int_0^1\ln x\,dx$ 的 Riemann sum (將 $[0,1]$ 等分成 n 小段的 right hand sum). $\Longrightarrow$

$\displaystyle\ln(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}\ln(a_n)=\int_0^1\ln x\,dx=[x\ln x-x]_0^1=-1$, 所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e}$。

練習: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\frac{4}{e}$ 。 $\square$

- 練習: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n(n+j)}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx\quad\left(=2\sqrt{2}-2\right)$

練習: $a\neq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{\frac{-aj}{n}}=\int_0^1 e^{-ax}\,dx\quad\left(=\frac{1-e^{-a}}{a}\right)$

練習: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{j}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx\quad\left(=\frac{2}{3}\right)$

練習: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p}{\sum_{j=1}^{n}(1+\frac{j}{n})^p}=\frac{\int_0^1 x^p\,dx}{\int_0^1(1+x)^p\,dx}\left(=\frac{1}{2^{p+1}-1}\right)$

你, 還是不覺得 $\displaystyle\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+\tfrac{i(b-a)}{n}\right)\tfrac{b-a}{n}}_{\text{left hand sum}}$ 或 $\displaystyle\underbrace{\sum_{j=1}^{n}f\left(a+\tfrac{j(b-a)}{n}\right)\tfrac{b-a}{n}}_{\text{right hand sum}}$, 和 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 長得很像嗎 ?