Derivatives 與 圖形 (升降、凹凸、極值等)

函數 f 的變量爲 x。型式上, $\frac{d^n}{dx^n}f = \underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\cdots\left[\frac{d}{dx}f\right]\cdots\right]\right]}_{n \text{ 層}}$ (又記作 $\boldsymbol{D}^n f$、$\frac{d^n f}{dx^n}$、$f^{(n)}$) 叫做 f 的 n^{th} *order derivative* (n階導數), 即 對 f 連續求導 n 次的結果。

$f'(x) = 0$ 的解 叫做 *critical point* (*critical number*)。

Derivative 與 函數 (圖形) 的關係

Γ_f 是 函數 $f(x)$ 在 interval I 上的圖形。何謂圖形的凹凸 已經具體定義過了:

Γ_f concave up : Γ_f 上 任二相異點連成的線段 在 Γ_f 的上方
Γ_f concave down : Γ_f 上 任二相異點連成的線段 在 Γ_f 的下方

若 f 在 I 上 是 differentiable, 則可以證明出

Γ_f concave up $\iff$ Γ_f 上任一點的切線在 Γ_f 的下方
Γ_f concave down $\iff$ Γ_f 上任一點的切線在 Γ_f 的上方

假設 f 是 differentiable on interval I。f'(切線斜率) 和 Γ_f 的走向有關：

$$f' > 0 \iff f \nearrow \text{ strictly}, \quad f' \geq 0 \iff f \nearrow, \quad \text{on interval } I;$$
$$f' < 0 \iff f \searrow \text{ strictly}, \quad f' \leq 0 \iff f \searrow, \quad \text{on interval } I.$$

假設 f 是 *twice differentiable* on interval I。$(f')' = f''$ 和 Γ_f 的凹凸性有關：

$$\Gamma_f \text{ concave up} \iff f' \nearrow \iff f'' \geq 0, \quad \text{on interval } I;$$
$$\Gamma_f \text{ concave down} \iff f' \searrow \iff f'' \leq 0, \quad \text{on interval } I.$$

要找出 *twice differentiable* 的函數 f 所有 local extrema/inflection 的發生點, 充要條件是

$f(a)$ is a local minimum $\iff f'(a) = 0,\ f''(a^-) > 0,\ f''(a^+) > 0$ (斜率由左至右 $- \to 0 \to +$ 遞增)
$f(b)$ is a local maximum $\iff f'(b) = 0,\ f''(b^-) < 0,\ f''(b^+) < 0$ (斜率由左至右 $+ \to 0 \to -$ 遞減)
c is a inflection point $\iff f''(c^-) \cdot f''(c^+) < 0$ (凹凸性在 c 點 改變)

(注意, 由於 f'' 連續, $f''(a) > 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f''(a^-) > 0$ and $f''(a^+) > 0$,

$f''(b) < 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f''(b^-) < 0$ and $f''(b^+) < 0$,

根據中間值定理, $f''(c^-) \cdot f''(c^+) < 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f''(c) = 0$。)

例如, $f_1(x) = (x-a)^2, f_2(x) = (x-a)^4, f_3(x) = (x-a)^6, \cdots, f_n(x) = (x-a)^{2n}$,
雖然 "$f_1'(a) = 0$ 且 $f_1''(a) = 2$" 導致 $f_1(a)$ 是 local minimum,
但是 $n > 1$ 時, "$f_n'(a) = 0$ 且 $f_n''(a) = 0$" 卻不構成 "$f_n(a)$ 是 local minimum" 的理由。
(如果我們早已經知道它們圖形的樣子都是開口朝上, n 越大, 在 $x = a$ 處就越平越鈍, 那麼 $\forall n \geq 1$, $f_n(a)$ 當然是 local minimum。但一般來說, 就是因爲很難一眼看出圖形長什麼樣子, 才須要去用各種方式來判斷。)

$f_n'(x) = 2n(x-a)^{n-1}$, $f_n''(x) = 2n(2n-1)(x-a)^{2n-2}$, 得到 $f_n'(a) = 0, f_n''(a^-) > 0, f_n''(a^+) > 0$, 依照我給定的

充要條件, 導致 $f_n(a)$ 是 local minimum $\forall\, n \geq 1$。

那, 爲什麼 "$f_1'(a) = 0$ 且 $f_1''(a) = 2$ 則 $f_1(a)$ 是 local minimum" 是對的呢? 理由就是上面所說的: 如果 f 是 twice differentiable, f'' 當然連續, 所以 $f''(a) > 0 \Rightarrow f''(a^-) > 0$ 且 $f''(a^+) > 0$。

所以, 光有 local extrema 存在 的充分條件 (如課本), 實在是不夠的應付實際需求, 因爲它只在單單一個點上看事情。記得這個觀念 (與數學無關): 要確定某某是否爲局部之最, 一定要和其周遭比較。

了解函數 $f(x)$(畫圖) 的方法

1. 將 $f(x)$ 化簡/約分, 找出所有 (橫、豎、斜) 漸近線、漸近曲線, 並分析 f 在漸近 (曲) 線附近及一般的行爲;
2. 求 $f'(x)$。令 $f'(x) = 0$ 以找出所有的 critical points $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ 並分析 Γ_f 的上升下降;
3. 求 $f''(x)$。令 $f''(x) = 0$ 以找出所有的 inflection points $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots$ 並分析 Γ_f 的凹凸性;
   (當 $f''(c) = 0$, 就必須檢查 $f''(c^-)$、$f''(c^+)$ 是否異號)
4. 判別 p_i 是否爲 local minimum/maximum 的發生處;
   (當 $f''(p_i) = 0$, 就必須檢查 $f''(p_i^-)$、$f''(p_i^+)$ 是否同爲 $+/-$ 號)
5. 綜合以上性質再進行細部分析, 然後繪圖。
   (若 q 是 local extremum/inflection 的發生處, 爲了標出準確高度, 還是得求出 $f(q)$ 的值)。

求絕對極值

函數 f 在 閉集合 I 上連續。如果 $f(p_1), f(p_2), \ldots$ 爲 f 在 I 上的 local minima/maxima, 則 $p_1, p_2, \ldots$ 是 I 的內點, 並且 f 在 I 上的 *global minimum/maximum*(*absolute minimum/maximum*) 發生在 $p_1, p_2, \ldots$, 或 I 的 邊界點。連續性使然。

例如, 已知 f 在 $I = [1,2] \cup [3,4]$ 上連續, 且 $f(1.2), f(3.4)$ 爲 f 在 I 上的 local minimum, 則 f 在 I 上的 global minimum 爲 $\min\left\{f(1.2), f(3.4), f(1), f(2), f(3), f(4)\right\}$。(1.2, 3.4 是 I 的內點, I 的邊界點爲 1,2,3,4)