

我把課本 p.343 的例題用 微積分求極值的兩種方法 算給你看。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, A \text{ 的 Rayleigh quotient } R(\mathbf{x}) = \frac{2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})},$$

求 $R(\mathbf{x})$ 的極值。

我們早就知道 $R(\mathbf{x}) = R(c\mathbf{x}) \forall c \neq 0$, 索性令 $\|\mathbf{x}\| = 1$, 則 $R(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ 。也就是說, 原來的「求 $R(\mathbf{x})$ 的極值」這個問題 就等於是「在 $g(\mathbf{x}) = 1$ 上 求 $f(\mathbf{x})$ 的極值」(見 “Lagrange Multipliers”)。極值發生處 $\Rightarrow \nabla f$ 與 ∇g 線性相關, 即: $(2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2, 2x_3) // (x_1, x_2, x_3)$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2) // (x_1, x_2) \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \text{ 或 } \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + 2x_2 = 2x_2 \end{array} \right\}$$

加上 $g(\mathbf{x}) = 1$, 就得到 $(x_1, x_2, x_3) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \pm(0, 0, 1)$ 。所以 $f(\mathbf{x})$ 在 $g(\mathbf{x}) = 1$ 上的極值可能發生在這六個點, 值分別是 1, 1, 3, 3, 2, 2。理論告訴我們實方陣的 Rayleigh quotient 都是有界的, 所以極小值是 1, 極大值是 3。■

$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{f \frac{\partial g}{\partial x_i} - g \frac{\partial f}{\partial x_i}}{g^2}$, 於是, 「令 $\nabla R = 0$ 」就變成

$$\left\{ \begin{array}{l} f \frac{\partial g}{\partial x_1} - g \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ f \frac{\partial g}{\partial x_2} - g \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ f \frac{\partial g}{\partial x_3} - g \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right\} \text{ 且 } \|\mathbf{x}\| = 1 \iff \left\{ \begin{array}{l} -2x_1^2x_2 + 2x_2^3 + 2x_3^2x_2 = 0, \\ -2x_1x_2^2 + 2x_1^3 + 2x_1x_3^2 = 0, \\ -4x_1x_2x_3 = 0 \end{array} \right\} \text{ 且 } \|\mathbf{x}\| = 1$$

$$\iff \mathbf{x} // (\pm i, 0, 1), (0, \pm i, 1), (1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1) \text{ 且 } \|\mathbf{x}\| = 1.$$

所以 $R(\mathbf{x})$ 的極值, 算出來的結果還是跟上面一樣, 可能發生在這六個點。..... ■

對, 答案跟課本的不一樣, 那是因為我抄錯 A 了, 索性將錯就錯。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, A \text{ 的 Rayleigh quotient } R(\mathbf{x}) = \frac{2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})},$$

求 $R(\mathbf{x})$ 的極值。等於是「在 $g(\mathbf{x}) = 1$ 上求 $f(\mathbf{x})$ 的極值」:

極值發生處 $\Rightarrow \nabla f$ 與 ∇g 線性相關, 即: $(2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3) // (x_1, x_2, x_3)$

$$\iff (x_2, x_1 + x_3, x_2) // (x_1, x_2, x_3) \iff \begin{cases} x_1 = tx_2 \\ x_2 = t(x_1 + x_3) \\ x_3 = tx_2 \end{cases} \iff \left\{ t = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \text{ 或 } x_2 = 0 \right\}, \text{ 加上}$$

$g(\mathbf{x}) = 1$, 就得到 $(x_1, x_2, x_3) = \frac{\pm 1}{2}(1, \sqrt{2}, 1), \frac{\pm 1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1), \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ 所以 $f(\mathbf{x})$ 在 $g(\mathbf{x}) = 1$ 上的極值可能發生在這六個點, 值分別是 $2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2, 2$ 。理論告訴我們實方陣的 Rayleigh quotient 都是有界的, 所以極小值是 $2 - \sqrt{2}$, 極大值是 $2 + \sqrt{2}$ 。■

$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{f \frac{\partial g}{\partial x_i} - g \frac{\partial f}{\partial x_i}}{g^2}$, 於是同前例, 「令 $\nabla R = 0$ 」的分子就變成 $f \nabla g - g \nabla f = 0, \Rightarrow \nabla f // \nabla g$, 這個我就不寫了, 因為上面已經做過了。

注意到「 $f \nabla g - g \nabla f = 0$ 的解集合」通常比「 $\nabla f // \nabla g$ 的解集合」大, 也就是說, 前者裡 不是我們要的解的 比較多。

所以 $R(\mathbf{x})$ 的極值, 算出來的結果還是跟上面一樣, 可能發生在這六個點。..... ■

無論 A 對不對稱, 都能算出其 Rayleigh quotient 的極小和極大值