$A$ 的 characteristic polynomial 記爲 $\chi_A(t)$, 最高次項係數爲 1,
$A$ 的 minimal polynomial 記爲 $\mu_A(t)$, 最高次項係數爲 1。

1) (+6) $u, v \in \mathbb{R}^n$ 非零向量。令 $A = u\,v^t$。試描述 $A$ 所有的特徵向量及對應的特徵值, 並求 $A$ 的 trace。§5.2#7

(*sol.*) $Ax = u\,v^T x = \langle x, v\rangle\, u$, $\parallel u\ \forall x$ (+1) 。若 $x \neq 0$ 爲 不平行 $u$ 的特徵向量, 則 $x \parallel Ax = \langle x, v\rangle u \parallel u \Leftrightarrow \langle x, v\rangle = 0$ (+1) , 即: $u \neq 0$ 爲特徵向量, 對應特徵值 $v^T u = \langle u, v\rangle$ (+1), 其餘特徵向量皆屬於 $n-1$ 維的子空間 $v^\perp$, 對應特徵值 0 (+2)。所以 $\mathrm{trace}(A) = \langle u, v\rangle$ 。(+1)

2) (+10) $g_0 = 0,\ g_1 = 1,\ g_{k+2} = (g_{k+1} + g_k)/2$ 求 $g_n$ 的通式。 §5.3#5

(*sol.*) $\begin{aligned} g_{k+2} &= \tfrac12 g_{k+1} + \tfrac12 g_k, \\ g_{k+1} &= 1 g_{k+1} + 0 g_k, \end{aligned}$ (+1) $\underbrace{\begin{bmatrix} g_{k+2} \\ g_{k+1}\end{bmatrix}}_{x_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac12 & \frac12 \\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} g_{k+1} \\ g_k\end{bmatrix}}_{x_k}$。(+1) $\det(A - tI) = 0 \Leftrightarrow t(t - \frac12) - \frac12 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2}, 1,$ (1+1) 對應特徵向量 $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix}$ (1+1), $\Rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix} = (u + 2v)/3$ (+2), $\therefore x_k = A^k x_0 = A^k(u + 2v)/3 = ((\frac{-1}{2})^k u + 2v)/3$, $\therefore g_k = \frac{2 - 2(\frac{-1}{2})^k}{3}$ (+2)。

3) (+6) 求: 重排矩陣 $A_{9\times9} := \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 5\,6\,7\,8\,1\,4\,9\,2\,3 \end{pmatrix}$ 的 $\chi_A(t)$ 和 $\mu_A(t)$ 。

(*sol.*) $A = (1\,5)(2\,6\,4\,8)(3\,7\,9)$(+2), $\therefore \chi_A(t) = (t^2-1)(t^4-1)(t^3-1) = (t+1)^2(t-1)^3(t^2+1)(t^2+t+1)$(+2), $\mu_A(t) = \mathrm{lcm}(t^2 - 1,\ t^4 - 1,\ t^3 - 1) = (t+1)(t-1)(t^2+1)(t^2+t+1)$(+2)。

4) (+6) $A_{n\times n} \neq I$ 是對稱的重排矩陣。把 $\chi_A(t)$ 和 $\mu_A(t)$ 的型式寫出來。

(*sol.*) 因爲對稱就是 $i \to j$ 就有 $j \to i$, 且 $\neq I$ 表示一定有長度 2 循環, 所以 $A$ 只能是長度 1 、長度 2 循環的合成。(+2) 所以 $\chi_A(t) = (t^2-1)^k(t-1)^{n-2k}$ (+2), $\mu_A(t) = \mathrm{lcm}(\underbrace{t^2-1, \cdots, t^2-1}_{k}, \underbrace{t-1, \cdots, t-1}_{n-2k}) = t^2 - 1$ (+2)。

5) (+5) 複數空間 $\mathbb{C}^2$ 中的向量 $u = \binom{1+2i}{3+4i}$ 和 $v = \binom{5+6i}{7+8i}$ 的內積 $\langle u, v\rangle$ 爲何? 若可定義夾角 $\theta$, 就說明並計算 $\cos\theta$。沒有則提出反對理由。

(*sol.*) $\langle u, v\rangle = (1-2i \quad 3-4i)\binom{5+6i}{7+8i} = (1-2i)(5+6i) + (3-4i)(7+8i) = 70 - 8i$ (+2)。一般來說 $\langle u, v\rangle \in \mathbb{C}$, 因爲 $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, 當然可以定義夾角: 令 $\begin{smallmatrix}\mathscr{U} := (1,2,3,4)^t \in \mathbb{R}^4 \\ \mathscr{V} := (5,6,7,8)^t \in \mathbb{R}^4\end{smallmatrix}$, 則 $\cos\theta = \frac{\langle \mathscr{U}, \mathscr{V}\rangle}{\|\mathscr{U}\|\cdot\|\mathscr{V}\|} = \frac{(1\cdot5 + 2\cdot6 + 3\cdot7 + 4\cdot8)}{\sqrt{30}\sqrt{174}} = \frac{70}{\sqrt{30}\sqrt{174}}$(+2) $=$ real part of $\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$ (+1)。

6) (+5) 若僅知 $\chi_A(t) = (t-2)^4(t-3)^4$, $\mu_A(t) = (t-2)^4(t-3)^3$, 填寫下列子空間的關係 $(>, =, <)$ 及其可能的維數。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 子空間 | $\ker(A-2I)$ | $<$ | $\ker(A-2I)^2$ | $<$ | $\ker(A-2I)^3$ | $<$ | $\ker(A-2I)^4$ | (+1) | |
| 可能維數 | 1 | , | 2 | , | 3 | , | 4 | (+1) | (不一定全部都得塡) |
| 子空間 | $\ker(A-3I)$ | $<$ | $\ker(A-3I)^2$ | $<$ | $\ker(A-3I)^3$ | $=$ | $\ker(A-3I)^4$ | (+1) | |
| 可能維數 | 1 | , | 3 | , | 4 | , | 4 | (+1) | (不一定全部都得塡) |
| 可能維數 | 2 | , | 3 | , | 4 | , | 4 | (+1) | |

7) (+4) 若 $J = \begin{bmatrix} 2&1&0&0 \\ 0&2&1&0 \\ 0&0&2&1 \\ 0&0&0&2 \end{bmatrix}$ 爲 $A_{4\times4}$ 的 Jordan form, 填寫下列子空間的關係 $(>, =, <)$ 及其維數。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 子空間: | $\ker(A-2I)$ | $<$ | $\ker(A-2I)^2$ | $<$ | $\ker(A-2I)^3$ | $<$ | $\ker(A-2I)^4$ | (+1) |
| 維數: | 1 | , | 2 | , | 3 | , | 4 | (+1) |

$\chi_A(t)$、$\chi_J(t)$ 爲何? $(t-2)^4$ (+1)

$\mu_A(t)$、$\mu_J(t)$ 爲何? $(t-2)^4$ (+1)

8) (+6) 若 $J=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ 爲 $A_{4\times 4}$ 的 Jordan form, 填寫下列子空間的關係 $(>,=,<)$ 及其維數。

子空間 $\ker(A-2I) < \ker(A-2I)^2 < \ker(A-2I)^3 = \ker(A-2I)^4$ (+1)
維數 1 , 2 , 3 , 3 (+1)

子空間 $\ker(A-3I) = \ker(A-3I)^2 = \ker(A-3I)^3 = \ker(A-3I)^4$ (+1)
維數 1 , 1 , 1 , 1 (+1)

$\chi_A(t)$、$\chi_J(t)$ 爲何? $(t-2)^3(t-3)$ (+1)

$\mu_A(t)$、$\mu_J(t)$ 爲何? $(t-2)^3(t-3)$ (+1)

9) (+6) 若 $J=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ 爲 $A_{4\times 4}$ 的 Jordan form, 填寫下列子空間的關係 $(>,=,<)$ 及其維數。

子空間 $\ker(A-2I) < \ker(A-2I)^2 = \ker(A-2I)^3 = \ker(A-2I)^4$ (+1)
維數 1 , 2 , 2 , 2 (+1)

子空間 $\ker(A-3I) < \ker(A-3I)^2 = \ker(A-3I)^3 = \ker(A-3I)^4$ (+1)
維數 1 , 2 , 2 , 2 (+1)

$\chi_A(t)$、$\chi_J(t)$ 爲何? $(t-2)^2(t-3)^2$ (+1)

$\mu_A(t)$、$\mu_J(t)$ 爲何? $(t-2)^2(t-3)^2$ (+1)

10) (+6) 若 $J=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ 爲 $A_{4\times 4}$ 的 Jordan form, 填寫下列子空間的關係 $(>,=,<)$ 及其維數。

子空間 $\ker(A-2I) = \ker(A-2I)^2 = \ker(A-2I)^3 = \ker(A-2I)^4$ (+1)
維數 2 , 2 , 2 , 2 (+1)

子空間 $\ker(A-3I) < \ker(A-3I)^2 = \ker(A-3I)^3 = \ker(A-3I)^4$ (+1)
維數 1 , 2 , 2 , 2 (+1)

$\chi_A(t)$、$\chi_J(t)$ 爲何? $(t-2)^2(t-3)^2$ (+1)

$\mu_A(t)$、$\mu_J(t)$ 爲何? $(t-2)^1(t-3)^2$ (+1)

11) (+6) 若 $J=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$ 爲 $A_{4\times 4}$ 的 Jordan form, 填寫下列子空間的關係 $(>,=,<)$ 及其維數。

子空間 $\ker(A-2I) = \ker(A-2I)^2 = \ker(A-2I)^3 = \ker(A-2I)^4$ (+1)
維數 2 , 2 , 2 , 2 (+1)

子空間 $\ker(A-3I) = \ker(A-3I)^2 = \ker(A-3I)^3 = \ker(A-3I)^4$ (+1)
維數 2 , 2 , 2 , 2 (+1)

$\chi_A(t)$、$\chi_J(t)$ 爲何? $(t-2)^2(t-3)^2$ (+1)

$\mu_A(t)$、$\mu_J(t)$ 爲何? $(t-2)^1(t-3)^1$ (+1)

12) (+4) 證明: 若 $A^H=A$, 即 $\overline{A}^t=A$ 則 $A$ 所有的特徵值皆爲實數。

(*sol.*) 令 $a$ 爲 $A$ 的特徵值, 對應特徵向量 $u\neq 0$ , 則 $\langle Au,u\rangle=\langle au,u\rangle=\overline{a}\langle u,u\rangle_{(+1)}$。
又 $\langle Au,u\rangle=\langle u,A^Hu\rangle_{(+1)}=\langle u,Au\rangle=\langle u,au\rangle=a\langle u,u\rangle_{(+1)}$, 故 $\overline{a}=a$, 即 $a\in\mathbb{R}_{(+1)}$。

13) (+6) 證明: 若 $A^H=A$, 即 $\overline{A}^t=A$ 則 $A$ 對應不同特徵值的特徵向量皆正交。

(*sol.*) 令 $a\neq b$ 且 $\begin{matrix}a \text{ 爲 } A \text{ 的特徵值, 對應特徵向量 } u\neq 0\\ b \text{ 爲 } A \text{ 的特徵值, 對應特徵向量 } v\neq 0\end{matrix}$ , 由上題知 $a,b\in\mathbb{R}$ 。則 $\langle Au,v\rangle=\langle au,v\rangle=\overline{a}\langle u,v\rangle_{(+1)}=a\langle u,v\rangle_{(+1)}$ 。又 $\langle Au,v\rangle=\langle u,A^Hv\rangle=\langle u,Av\rangle_{(+1)}=\langle u,bv\rangle=b\langle u,v\rangle_{(+1)}$, 故 $(a-b)\langle u,v\rangle=0$ (+1), 即 $u\perp v$ (+1)。

14) (+8) 求: 重排矩陣 $A_{3\times 3} = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$ 所有的特徵值與對應的特徵向量 (複數)。

(*sol.*) 顯然地, $\chi_A(t) = t^3 - 1$, 特徵值為 1, $\omega := \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\omega} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ (1+1+1) (注意 $\omega^3 = 1, \therefore \omega^2 = \frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$)

1 對應的特徵向量為 $(1,1,1)^t$ (+1)。令 $(A-\omega I)u = 0$, $\begin{bmatrix}-\omega & 0 & 1\\ 1 & -\omega & 0\\ 0 & 1 & -\omega\end{bmatrix} u = 0$, $\Rightarrow u = (1,\omega^2,\omega)^t$ (+2)。所以 $\overline{\omega}$ 對應的特徵向量為 $\overline{u} = \overline{(1,\omega^2,\omega)^t} = \overline{(1,\overline{\omega},\omega)^t} = (1,\omega,\overline{\omega})^t = (1,\omega,\omega^2)^t$ (+2)。

15) $A = \begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 4\end{bmatrix}$, $\chi_A(t) = (t-2)^4$ 已經幫你算好了。

(a) (+16) 給出各個 (generalized) eigenspace (即 $\ker(A-2I)^i$) 的生成元 。

(*sol.*) $$A - 2I = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{r_2:=r_2-r_1,\\ r_3:=r_3-r_1,\\ r_4:=r_4-r_1,}} \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{r_4:=r_4-r_2,\\ r_1:=r_1-r_2,\\ r_2:=-r_2,}} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$ 即: 列運算 $R = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (到此 6 分)

$(A-2I)x = 0, \iff x = x_3(1,0,1,0)^t + x_4(0,1,0,1)^t + R\cdot 0$

即: $\ker(A-2I) = \text{span}\Big\{\underbrace{(1,0,1,0)^t}_{u_1}, \underbrace{(0,1,0,1)^t}_{u_2}\Big\}$ (1+1) $R\,u_1 = (2,1,0,0)^t$, $R\,u_2 = (-1,-1,0,0)^t$.

任意 $a\,u_1 + b\,u_2 \in \ker(A-2I)$, 則 $(A-2I)x = a\,u_1 + b\,u_2$ 有解 $\Leftrightarrow R(A-2I)x = a\,R\,u_1 + b\,R\,u_2$ $\Leftrightarrow x = x_3(1,0,1,0)^t + x_4(0,1,0,1)^t + a(2,1,0,0)^t + b(-1,-1,0,0)^t$ , 此式對任意 $a, b$ 都有解 (+2),
即: $\ker(A-2I)^2 = \text{span}\{\underbrace{(1,0,1,0)^t}_{u_1}, \underbrace{(0,1,0,1)^t}_{u_2}, \underbrace{(2,1,0,0)^t}_{R\,u_1}, \underbrace{(-1,-1,0,0)^t}_{R\,u_2}\}$ (+2) 且 對任意 $(a,b) \neq (0,0)$ 都會有 $a\,R\,u_1 + b\,R\,u_2 \in \ker(A-2I)^2 \setminus \ker(A-2I)$, 左乘 $A-2I$ 就等於 $a\,u_1 + b\,u_2 \in \ker(A-2I)^2$ 了。

現在要線性獨立的 $v_2, v_4 \in \ker(A-2I)^2 \setminus \ker(A-2I)$ 使得 $\begin{matrix} v_2 \xrightarrow{A-2I} v_1 \in \ker(A-2I)\\ v_4 \xrightarrow{A-2I} v_3 \in \ker(A-2I)\end{matrix}$ :

取 $(a,b) = (1,0)$, 即: $v_2 := R\,u_1 \xrightarrow{A-2I} v_1 := u_1$ ;
取 $(a,b) = (0,1)$, 即: $v_4 := R\,u_2 \xrightarrow{A-2I} v_3 := u_2$ ;
即: $(A-2I)(2,1,0,0)^t = (1,0,1,0)^t$ (+2)
$(A-2I)(-1,-1,0,0)^t = (0,1,0,1)^t$ (+2) 。

我寫得這麼詳細, 就是希望你能規規矩矩地做, 不要投機取巧或用矇的。不會就再考。

(b) (+4) 將 $A$ 化為 Jordan form 並寫出最小多項式 $\mu_A(t)$ 。

(*sol.*) 令 $S = [v_1|v_2|v_3|v_4] = \left[\begin{array}{c|c|c|c}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$ (+2), 則 $J := S^{-1}A\,S = \left[\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right]$ (+1), $\mu_A(t) = (t-2)^2$ (+1)。