

A 的 characteristic polynomial 記為 $\chi_A(\lambda)$, A 的 minimal polynomial 記為 $\mu_A(\lambda)$,

(一) (28) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & -5 \\ -2 & 2 & 5 & -6 \\ -3 & -1 & 9 & -7 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, 特徵值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ 幫你算好了。依下列步驟化為 Jordan form。

a) 將這兩套 generalized eigenspace 的計算寫於此處。

關於 $\ker(A - 2I), \ker(A - 2I)^2, \dots$ 生成元 的計算:

(sol.) $A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 & -5 \\ -2 & 0 & 5 & -6 \\ -3 & -1 & 7 & -7 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{reduced row echelon form}]{\text{簡化為}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (+4)。$

令 $v_0 \in \ker(A - 2I) \setminus \{0\}$,
則 $v_0 = (2, 1, 2, 1)^t x_4$, 取 $v_0 = (2, 1, 2, 1)^T$. (+2)

關於 $\ker(A - 3I), \ker(A - 3I)^2, \dots$ 生成元 的計算:

(sol.) $A - 3I = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 & -5 \\ -2 & -1 & 5 & -6 \\ -3 & -1 & 6 & -7 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③: 記錄列運算}]{\text{簡化為 reduced row echelon form}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (+4)。$

令 $v_1 \in \ker(A - 3I) \setminus \{0\}$,
則 $v_1 = (1, 2, 2, 1)^t x_4$, 取 $v_1 = (1, 2, 2, 1)^T$. (+2)

令 $v_2 \in \ker(A - 3I)^2 \setminus \ker(A - 3I)$ 且要求 $(A - 3I)v_2 = v_1$, (對 v_1 做 ③)
則 $v_2 = (1, 2, 2, 1)^t x_4 + (1, 1, 1, 0)^t$, 取最簡單的 $v_2 = (1, 1, 1, 0)^T$ 即可. (+4)

令 $v_3 \in \ker(A - 3I)^3 \setminus \ker(A - 3I)^2$ 且要求 $(A - 3I)v_3 = v_2$, (對 v_2 做 ③)
則 $v_3 = (1, 2, 2, 1)^t x_4 + (0, -1, 0, 0)^t$, 取最簡單的 $v_3 = (0, -1, 0, 0)^T$ 即可. (+4)

於是得到

$A v_0 = 2 v_0$	$\ker(A - 2I) = \langle v_0 \rangle = \ker(A - 2I)^2 = \ker(A - 2I)^3 = \dots$
$A v_1 = 3 v_1$	$\ker(A - 3I) = \langle v_1 \rangle$
$A v_2 = 3 v_2 + v_1$	$\ker(A - 3I)^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$
$A v_3 = 3 v_3 + v_2$	$\ker(A - 3I)^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \ker(A - 3I)^4 = \ker(A - 3I)^5 = \dots$

b) $\chi_A(\lambda) = \overbrace{(\lambda - 2)(\lambda - 3)^3}^{(+1)}, \mu_A(\lambda) = \overbrace{(\lambda - 2)(\lambda - 3)^3}^{(+1)}$ 。 A 的 Jordan form 為 $J = S^{-1} A S$, 寫出 S, J 。

(sol.) $S := [v_0 | v_1 | v_2 | v_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (+4) J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} (+2)$

(二) (8) 什麼是 “power method”? 怎麼用? 什麼情況下會「成功»? (即:「成功」時可以得到什麼?)

(sol.) 給定一實方陣 $A_{n \times n}$, 隨機選取 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 令 $\mathbf{v}_0 := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, 重複做 $\mathbf{v}_i := \frac{A\mathbf{v}_{i-1}}{\|A\mathbf{v}_{i-1}\|}, i = 1, 2, 3, \dots (+4)$ 若 A 絕對值最大的特徵值 只有一個時, $\mathbf{v}_i$ 才會成功收斂, 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i$ 為其對應的特徵向量 (+2), 並且 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|A\mathbf{v}_i\|$ 為該特徵值的絕對值 (+2)。

(三) (28) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 。找出正交矩陣 U, V 使得 $V^t A U = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，做所謂的 SVD。

(sol.) $H := A^t A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\chi_H(t) = t^3 - 25t^2 + 150t = (t-15)(t-10)t$, (+6)

$\lambda_1 = 15$: $H - 15I = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, 取特徵向量 $u_1 := (1, -1, -1)^t / \sqrt{3}$ (+2)

$\lambda_2 = 10$: $H - 10I = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 取特徵向量 $u_2 := (0, 1, -1)^t / \sqrt{2}$ (+2)

$\lambda_3 = 0$: $H - 0I = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, 取特徵向量 $u_3 := (2, 1, 1)^t / \sqrt{6}$ (+2)

$\therefore \sigma_1 = \sqrt{15}, v_1 = Au_1 / \sigma_1 = (-2, 0, 0)^t / \sqrt{5}$ (+1)

$\sigma_2 = \sqrt{10}, v_2 = Au_2 / \sigma_2 = (0, -2, -1, 0)^t / \sqrt{5}$ (+1)

則 $v_1, v_2 \perp (x, y, -2y, 2x)^t = x(1, 0, 0, 2)^t + y(0, 1, -2, 0)^t, \Rightarrow$ 取 $v_3 = (1, 0, 0, 2)^t / \sqrt{5}$ 最簡單 (+3)。
 $v_4 = (0, 1, -2, 0)^t / \sqrt{5}$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{V^t} A \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}}_U = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{令 } \Sigma_+ = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad (1+1+1)$$

令 $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)^t$ 。以 SVD 求 $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ 的最小值 還有「使得 $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ 達到最小值的 $\mathbf{x}$ 」裡頭最短的。

(sol.) 令 $\mathbf{z} = U^t \mathbf{x}$, $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|V\Sigma_+ U^t \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|\Sigma_+ U^t \mathbf{x} - V^t \mathbf{b}\|^2 = \|\Sigma_+ \mathbf{z} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -3, 3, -1)^t\|^2$ (+2)

$= \|(\sqrt{15}z_1, \sqrt{10}z_2, 0, 0)^t - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -3, 3, -1)^t\|^2 = \|(\sqrt{15}z_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{10}z_2 + \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{-3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})^t\|^2 = (\sqrt{15}z_1 + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + (\sqrt{10}z_2 + \frac{3}{\sqrt{5}})^2 + 2$ (+2),

即: 當 $z_1 = \frac{-1}{5\sqrt{3}}, z_2 = \frac{-3}{5\sqrt{2}}$ 即 $\mathbf{x} = U(\frac{-1}{5\sqrt{3}}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, z_3)^t$ 時得最小值 $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = 2$ (+2),

而 $\mathbf{x} = U(\frac{-1}{5\sqrt{3}}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, 0)^t = \frac{1}{30}(-2, -7, 11)^t$ 是其中最短的。(+2)

(四) (18) $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -2 & 4 \\ -6 & 5 & 11 & -8 \\ -2 & 11 & -47 & -14 \\ 4 & -8 & -14 & 0 \end{bmatrix}$, 對 $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 進行配方。過程僅對 A 的上三角做數字計算, 不寫 x_i 的式子。

$$(sol.) \begin{bmatrix} 4 & -6 & -2 & 4 \\ & 5 & 11 & -8 \\ & & -47 & -14 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, -(-4) \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ & (\frac{-3}{2})^2 & \frac{-3}{2} \cdot \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \cdot 1 \\ & & (\frac{-1}{2})^2 & \frac{-1}{2} \cdot 1 \\ & & & (1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -4 & 8 & -2 \\ & -48 & -12 \\ & & -4 \end{bmatrix} \quad (+5), -(-4) \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ & (-2)^2 & -2 \cdot \frac{1}{2} \\ & & (\frac{1}{2})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & -32 & -16 \\ & & -3 \end{bmatrix} \quad (+4),$$

$$-(-32) \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & (\frac{1}{2})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 5 \end{bmatrix} \quad (+3),$$

即: $q(\mathbf{x}) = 4(x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4)^2 - 4(x_2 - 2x_3 + \frac{1}{2}x_4)^2 - 32(x_3 + \frac{1}{2}x_4)^2 + 5x_4^2$ (+2)。

做 A 的 $L D L^t$ 矩陣分解 (L : 下三角矩陣, D : 對角矩陣)

$$(sol.) \text{ 由配方的結果, 直接取 } L = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{-3}{2} & 1 & & \\ \frac{-1}{2} & -2 & 1 & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{(+2)}, D = \underbrace{\text{diag}(4, -4, -32, 5)}_{(+2)}, \left(L^t = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ 即可。}$$

(五) (26) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 求其 Rayleigh quotient $R(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ 的極小值和極大值。

(sol.) 令 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2)$,
 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$,

原「求 $R(\mathbf{x})$ 的極值」的問題 等同於「在 $g(\mathbf{x}) = 1$ 上 求 $f(\mathbf{x})$ 的極值」(+2),

極值發生處 $\Rightarrow \nabla f$ 與 ∇g 線性相關, 即: $(2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3 - x_4, -x_3 + 2x_4) \parallel \mathbf{x}$ (+2),

即 $(x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3) \parallel \mathbf{x}$, 即 $\begin{matrix} x_1 = tx_2 \\ x_2 = t(x_1 + x_3) \\ x_3 = t(x_2 + x_4) \\ x_4 = tx_3 \end{matrix}$, 中間兩式 $\begin{matrix} (1 - t^2)x_2 = tx_3 \\ (1 - t^2)x_3 = tx_2 \end{matrix}$ 相除得 $x_2^2 = x_3^2$,

$x_2 = x_3: t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (+1+1), $x_2 = -x_3: t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, t_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (+1+1), 就得到 $\mathbf{x} \parallel$ $\begin{matrix} \mathbf{x}_1 = (t_1, 1, 1, t_1)^t (+2) \\ \mathbf{x}_2 = (t_2, 1, 1, t_2)^t (+2) \\ \mathbf{x}_3 = (t_3, 1, -1, -t_3)^t (+2) \\ \mathbf{x}_4 = (t_4, 1, -1, -t_4)^t (+2) \end{matrix}$, 僅需將

這四個方向代入 $R(\mathbf{x})$ 即可:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}_1) &= \frac{2t_1^2 - 2t_1 + 1}{t_1^2 + 1} = \frac{-4t_1 + 3}{-t_1 + 2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (+2) \\ R(\mathbf{x}_2) &= \frac{2t_2^2 - 2t_2 + 1}{t_2^2 + 1} = \frac{-4t_2 + 3}{-t_2 + 2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} (+2) \\ R(\mathbf{x}_3) &= \frac{2t_3^2 - 2t_3 + 1}{t_3^2 + 1} = \frac{5}{t_3 + 2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} (+2) \\ R(\mathbf{x}_4) &= \frac{2t_4^2 - 2t_4 + 1}{t_4^2 + 1} = \frac{5}{t_4 + 2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} (+2) \end{aligned}$$

所以 $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} R(\mathbf{x}) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (+1), $\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} R(\mathbf{x}) = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ (+1)。

(六) (20) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 。

a) 求 Jacobi's method 的 $\|S^{-1}T\|$ 。

(sol.) $S := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (+1), $T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (+1), 因為 S 是對角矩陣, $\|S^{-1}T\| = \|S^{-1}\| \cdot \|T\|$,

所以直接算 $\|T\|$: $T^t T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ (+2), $\sigma(T^t T) = \{0, 3, 9\}$, (+4)

$\therefore \|T\| = \sqrt{\rho(T^t T)} = 3$ (+1), $\|S^{-1}T\| = \|S^{-1}\| \cdot \|T\| = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} > 1$ (+1)

b) 求 Gauss-Seidel's method 的 $\|S^{-1}T\|$ 。

(sol.) $S := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (+1), $T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (+1), 令 $B := S^{-1}T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ (+4),

$B^t B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$ (+2), 很明顯地, $\sigma(B^t B) = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ (+1),

$\therefore \|B\| = \sqrt{\rho(B^t B)} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ (+1)