

每題皆須整齊列出有效之計算、推導、証明式子於試題下方空白處方予計分。不依指定方式、出現不相干內容皆計零分。

1. (35分) (高斯消去法) $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -3 & -4 & -15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$,

(a) (28分) 以「同行中絕對值最大、列標號最小的非零數為主元」, 對 A 做高斯消去法列運算, 完成所謂的 $PA = LU$ 分解。要具體寫出矩陣內容。

$$\begin{aligned} (sol.) \quad E_1 &= (12)_{(1分)}, \quad \left(\text{記錄}(\cdot, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}) \right), \quad A_1 := M_1 E_1 A = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & -3/2 & -2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 9/4 & 3 & 5/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1 & -5/4 \end{bmatrix} \quad (12分), \\ E_2 &= (23)_{(1分)}, \quad \left(\text{記錄}(\cdot, \cdot, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}) \right), \quad A_2 := M_2 E_2 A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 9/4 & 3 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/3 \end{bmatrix} \quad (4分), \\ E_3 &= (33)_{(1分)}, \quad \left(\text{記錄}(\cdot, \cdot, \cdot, \frac{-1}{2}) \right), \quad A_3 := M_3 E_3 A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -3 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 9/4 & 3 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_{(1分)}, \\ P &= E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{整個 2 分}), \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2/3 & 1 & 0 \\ -3/4 & 1/3 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (6分)。 \end{aligned}$$

(b) (3分) $\text{row}(A)$ 為何?

$$(sol.) \quad (\text{列運算}) \quad U \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -8 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{9}{4} & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{10}{3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \therefore \text{row}(A) = \langle (1, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 3, 4, 0), (0, 0, 0, 1, 0) \rangle. \quad (\text{一根向量 1 分})$$

(c) (4分) $\text{null}(A)$ 為何?

$$\begin{aligned} (sol.) \quad &\text{因爲 } \text{null}(A) \perp \text{row}(A), \text{ 所以 } \mathbf{x} \in \text{null}(A) \text{ iff } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}, \\ &\text{即 } \text{null}(A) = \langle (2, -1, 0, 0, 0), (0, 4, -3, 1, 0) \rangle \quad (\text{一根向量 2 分}). \end{aligned}$$

2. (§1.4#52) (9分) A 可逆。如何 基於列運算 (對調、高斯消元、縮放), 逐步將 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ 變成 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & * \end{array} \right]$?

$$\begin{aligned} (sol.) \quad (1) \quad &\text{將 } A \text{ 做列運算 (對調、高斯消元、縮放) 成 } I: \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]_{(2分)} \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1}B \\ \hline C & D \end{array} \right]_{(1分)}, \\ (2) \quad &\text{用 } I \text{ 對 } C \text{ 做列消元: } \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -C & I \end{array} \right]_{(2分)} \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1}B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1}B \\ \hline 0 & D - CA^{-1}B \end{array} \right]_{(1分)}, \\ (3) \quad &\text{將 } I \text{ 恢復成 } A: \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]_{(2分)} \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1}B \\ \hline 0 & D - CA^{-1}B \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D - CA^{-1}B \end{array} \right]_{(1分)}, \\ &\left(\therefore (3) \leftarrow (2) \leftarrow (1): \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -C & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I \end{array} \right] \right). \end{aligned}$$

3. (§2.2#27) (4分) 課堂說過 任意矩陣的 row space 與 column space 一一對應, 故 $\text{row rank} = \text{column rank}$.

(a) 描述 $\text{rank}(AB)$ 與 $\text{rank}(A)$ 的大小關係, 理由正確才給分。

(sol.) AB 的行 是 A 的行線性組合 (1分), 故 AB 行的線性獨立的個數 不會比 A 行的多 (1分)。
所以是 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ 。

(b) 描述 $\text{rank}(AB)$ 與 $\text{rank}(B)$ 的大小關係, 理由正確才給分。

(sol.) AB 的列 是 B 的列線性組合 (1分), 故 AB 列的線性獨立的個數 不會比 B 列的多 (1分)。
所以是 $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ 。

4. (§2.2#42) (8分) 分別依據下列 “ $Ax = b$ ” 解的個數, 用文字說明 A 的性質:

(a) 有 0 或 1 個解, 但取決於 b 。 A 的行線性獨立, 且 $\text{col}(A)$ 不足全空間 (1+1)

(b) 有 ∞ 個解, 與 b 無關。 A 的行線性相關, 且 $\text{col}(A)$ 等於全空間 (1+1)

(c) 有 0 或 ∞ 個解, 但取決於 b 。 A 的行線性相關, 且 $\text{col}(A)$ 不足全空間 (1+1)

(d) 有 1 個解, 與 b 的選取無關。 A 的行線性獨立, 且 $\text{col}(A)$ 等於全空間 (1+1)

5. (§2.2#43) (8分) $A_{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$ 。分別依據下列 “ $Ax = b$ ” 解的個數, 給出 m, n, r 之間的關係。
(可以比較的 就要全寫出來)

(a) 對某些 b 無解。 $r < m$ (不必寫理由, 寫了也不算分)

(b) 對任何 b 皆有無窮多解。 $r = m < n$ (不必寫理由, 寫了也不算分)

(c) 對某些 b 有唯一解, 對某些 b 無解。 $m > n = r$ (不必寫理由, 寫了也不算分)

(d) 對任何 b 皆有唯一解。 $m = n = r$ (不必寫理由, 寫了也不算分)

6. (§2.4#8) (5分) $A_{m \times n}$ 是固定的。若 b 任意給, $Ax = b$ 總是有解, 請問 $A^t y = 0$ 有唯一解還是無窮多解?

(sol.) 表示 $b \in \mathbb{R}^m$ 無論如何都會落在 $\text{col}(A)$, 所以 $\text{col}(A)$ 是全空間 $\mathbb{R}^m$ (1分), 即 $\text{rank}(A) = m$, 所以 A 的 m 列一定是線性獨立的 (2分), 即 A^t 的 m 行線性獨立 (1分), $A^t y = 0$ 行線性組合係數 y 只能為零 (1分)。

7. (9分) (§2.4 左右逆 p.108) 若 $\blacksquare$ 可逆, 方可將 $\blacksquare$ 的逆 記為 $\blacksquare^{-1}$ 。

(a) 若 (AB) 可逆, $(AB)^{-1}$ 的轉置, 記為 $(AB)^{-t}$, 是什麼? 理由正確才給分。

(sol.) $(AB)(AB)^{-1} = I$, 轉置: $[(AB)(AB)^{-1}]^t = (AB)^{-t}(AB)^t = I$ (1分),
也就是說 $(AB)^t$ 的逆 $[(AB)^t]^{-1} = (B^t A^t)^{-1}$, 就是 $(AB)^{-t}$ (2分)。

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 如果 A 有左逆或右逆, 請給出一個。

(sol.) $(A^t A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (1分), $\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列運算}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & | & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, 即 $(A^t A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ (3分),

$(A^t A)^{-1} A^t = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$ (2分) 是 A 的一個左逆 (不唯一)。

8. (10分) (§2.6# 21,26 「cyclic 變換」): 將 $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 視為列重排 的矩陣表示為 $P_{5 \times 5}$ 。

(a) 『 $P^n = I$ 』有這回事嗎? 如果有, 那 n 是什麼?

(sol.) 也就是在問: 重排 P 每 n 次會回到原位嗎?

因為 $\sigma = (1\ 5\ 3)(2\ 4)$ (2分), 所以 n 是 6 的倍數, 也就是 3, 2 公倍數 (2分)。

(b) 什麼樣的 $\mathbf{x}$ 作用 P 後不變? (即: $\mathbf{x} = P\mathbf{x}$)

(sol.) 也就是 $\mathbf{x}$ 裡 位置 1, 5, 3 會一樣 (1分), 位置 2, 4 會一樣 (1分),

即 $\mathbf{x} = x_1(1, 0, 1, 0, 1)^t + x_2(0, 1, 0, 1, 0)^t$, 即 $\mathbf{x} \in \text{null}(I - P) = \langle (1, 0, 1, 0, 1)^t, (0, 1, 0, 1, 0)^t \rangle$ (一根本向量 2分)。

9. (32分) (§2.6 正斜投射、反射) 令 $\mathbf{v} = (0, 1, 1)^t$ 。

(a) (12分) 求「順著 $\mathbf{v}$ 投射到 $\langle (1, 0, 1)^t, (1, 1, 0)^t \rangle$ 上」的矩陣表示。

$$\begin{aligned} P\mathbf{e}_1 &= P\left(\frac{-1}{2}(0, 1, 1)^t + \frac{1}{2}(1, 0, 1)^t + \frac{1}{2}(1, 1, 0)^t\right)_{(1+1+1)} = \frac{1}{2}(1, 0, 1)^t + \frac{1}{2}(1, 1, 0)^t = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t, \\ (sol.) \quad P\mathbf{e}_2 &= P\left(\frac{1}{2}(0, 1, 1)^t + \frac{-1}{2}(1, 0, 1)^t + \frac{1}{2}(1, 1, 0)^t\right)_{(1+1+1)} = \frac{-1}{2}(1, 0, 1)^t + \frac{1}{2}(1, 1, 0)^t = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^t, \text{ 即 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ P\mathbf{e}_3 &= P\left(\frac{1}{2}(0, 1, 1)^t + \frac{1}{2}(1, 0, 1)^t + \frac{-1}{2}(1, 1, 0)^t\right)_{(1+1+1)} = \frac{1}{2}(1, 0, 1)^t + \frac{-1}{2}(1, 1, 0)^t = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t, \end{aligned}$$

(1 + 1 + 1)

(b) (14分) $P = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是正、斜投射嗎? 如果是, 請把 P 的投射方向、投射到哪裡 求出來。

(sol.) Check: $P^2 = P$ (3分) 但不對稱, 所以 P 是斜投射 (2分)。

故: 投射方向 為 $\text{null}(P) = \dots = \langle (3, 3, -1)^t \rangle$ (3分),

投射到 $\text{ran}(P) = \text{col}(P)$ (或 $\text{null}(I - P)$) $= \dots = \langle (1, 0, 1)^t, (1, 1, 0)^t \rangle = \langle (1, 0, 1)^t, (0, 1, -1)^t \rangle$ (一根本向量 3分)

(兩者不相干, 各算各的, 順序沒差)

(c) (3分) 求「順著 $\mathbf{v}$ 正投射到 $\mathbf{v}^\perp$ 上」的矩陣表示。

$$(sol.) \quad I - \frac{1}{\mathbf{v}^t \mathbf{v}} \mathbf{v} \mathbf{v}^t_{(1分)} = I - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(1分)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}_{(1分)}$$

(d) (3分) 求「反射到 $\mathbf{v}^\perp$ 對面」的矩陣表示。

$$(sol.) \quad I - \frac{2}{\mathbf{v}^t \mathbf{v}} \mathbf{v} \mathbf{v}^t_{(1分)} = I - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(1分)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{(1分)}$$