

每道題必須整齊列出有效之計算、推導式子於答案紙方予計分。有答案沒正確理由、不依指示作答者 0 分。
粗體字母 (boldface) 表示向量 (vector), 大寫字母表示矩陣 (matrix)。所有專有名詞皆不得詢問。

1. (+3) 證明: $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 與 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 垂直 $\iff \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ 。 §3.1#12

(sol.) $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 與 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 垂直 $\iff \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = 0$ (+1) $\iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$ (+1) $\iff \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 \iff \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ (+1)

2. (+5) 已知 $A_{3 \times 4} B_{4 \times 5} = 0$ 。證明: $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq 4$ 。 §3.1#52

(sol.) 令 $a := \text{rank}(A)$, $b := \text{rank}(B)$ 。

$AB = 0$ 表示 $\text{col}(B) \subseteq \text{null}(A) \subseteq \mathbb{R}^4$ (+2),
必定 $b = \dim \text{col}(B) \leq \dim \text{null}(A) = 4 - a$ (+2), 即 $a + b \leq 4$ (+1)。

3. (+7) 證明柯西不等式 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 並解釋等號何時成立。 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 不特指 $\mathbf{x}^t \mathbf{y}$ 。 §3.2#7

(sol.) 令 $q(t) := \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle$ (+1), 很明顯地, $q(t) \geq 0$ (+1) 且 $q(t) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ (+1), 所以 q 的判別式 $(2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq 0$, 即 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ (+1)。

WLOG, 說是 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, 則: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$, 即 q 的判別式等於 0 $\iff q$ 僅在 $t_0 := \frac{-2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$ 一處為零 (+1) $\iff \mathbf{x} + t_0 \mathbf{y} = \mathbf{0}$ (+1) $\iff \mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 線性相關, 即 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 平行。(+1)

4. (+4) 方陣 $P \neq 0, I$, 且 $P = P^t P$, 證明: P 是正投射。 §3.3#10(a)

(sol.) 很明顯地, P 是對稱的。於是 $P = P^t P = P^2$, 即 P 是投射(+1); 又因 P 是對稱的, 故 $\text{col}(P) = \text{row}(P) \perp \text{null}(P)$ (+2), 所以 P 是正投射(+1)。

5. (a) (+4) 『未定係數之 $y = c + dt + et^2$ 通過 $(t, y) = (-1, 2), (0, 0), (1, -3), (2, -5)$ 四點』對應的『 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 』問題是什麼? 將 $A, \mathbf{x}, \mathbf{b}$ 明確寫出來。 §3.3#21, 23, 38

$$(sol.) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (\text{寫給自己看的}) \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -15 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$A(+2) \quad \mathbf{x}(+1) = \mathbf{b}(+1) \quad A^t A \quad \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}$$

(b) (+6) 求上述『 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 』問題的最小平方解 $\hat{\mathbf{x}}$ 。

(sol.) 很明顯地, $\text{rank}(A) = 3$ 所以 $A^t A$ 可逆, $A^t A \mathbf{x} = A^t \mathbf{b}$ 的解 $\hat{\mathbf{x}}$ 唯一, 同時它也是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 問題的最小平方解 (+1)。計算: $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & 6 & 8 & -15 \\ 6 & 8 & 18 & -21 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 6 & 8 & -15 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/10 \\ 0 & 1 & 0 & -12/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$ 到此4分,
即 $\hat{\mathbf{x}} = (A^t A)^{-1} (A^t \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} -3/10 \\ -12/5 \\ 0 \end{bmatrix}$ (+1)

(c) (+13) 對 $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ 配方 (以求最小平方解)。

$$(sol.) \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = (c - d + e - 2)^2 + c^2 + (c + d + e + 3)^2 + (c + 2d + 4e + 5)^2 \quad (+1)$$

$$= 4c^2 + 4cd + 12ce + 6d^2 + 16de + 18e^2 + 12c + 30d + 42e + 38 \quad (+1)$$

$$= 4\left(c^2 + cd + 3ce + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3e}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}de\right) + 5d^2 + 10de + 9e^2 + 12c + 30d + 42e + 38 \quad (+1)$$

$$= 4\left(c + \frac{d}{2} + \frac{3e}{2}\right)^2 + 5(d^2 + 2de + e^2) + 4e^2 + 12c + 30d + 42e + 38 \quad (+1)$$

$$= 4\left(c + \frac{d}{2} + \frac{3e}{2}\right)^2 + 5(d + e)^2 + 4e^2 + 2(6c + 15d + 21e) + 38 \quad (+1)$$

$$= 4\left(c + \frac{d}{2} + \frac{3e}{2} + p\right)^2 + 5(d + e + q)^2 + 4(e + r)^2 + s \quad (+1)$$

$$\begin{array}{llll} P=4p & 1 \cdot P & = 6 & P=6 \quad p=\frac{P}{4}=\frac{3}{2} \quad (+1) \\ \text{令 } Q=5q, \text{ 一次項: } \frac{1}{2} \cdot P + 1 \cdot Q & = 15 \quad (+2) & \iff Q=12 & \iff q=\frac{Q}{5}=\frac{12}{5} \quad (+1), \quad s=38-4\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{1}{5} \quad (+1) \\ R=4r & \frac{3}{2} \cdot P + 1 \cdot Q + 1 \cdot R & = 21 & R=0 \quad r=\frac{R}{4}=0 \quad (+1) \end{array}$$

$$\text{故 } \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = 4\left(c + \frac{d}{2} + \frac{3e}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + 5\left(d + e + \frac{12}{5}\right)^2 + 4e^2 + \frac{1}{5}$$

在 $e = 0 \Rightarrow d = -\frac{12}{5} \Rightarrow c = -\frac{3}{10}$ 有極小值 $\frac{1}{5}$ (+1)。

6. (a) (+9) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -3 \\ 5 & 3 & 8 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. 依 Gram-Schmidt process 給出一組 $\text{col}(A)$ 的正交基。

(sol.) $A := [a_1 | a_2 | a_3 | a_4] \rightarrow Q := [q_1 | q_2 | q_3 | \cdots]$ orthogonal:

$$q_1 = a_1 = (1, 3, 5, -1)^t \rightarrow \frac{1}{6}(1, 3, 5, -1)^t \quad (+1)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= a_2 - \langle q_1, a_2 \rangle q_1 \\ &= (-3, 2, 3, 0) - 3 \cdot \frac{1}{6}(1, 3, 5, -1)^t \\ &= \frac{1}{2}(-7, 1, 1, 1)^t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{13}}(-7, 1, 1, 1)^t \quad (+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_3 &= a_3 - \langle q_1, a_3 \rangle q_1 - \langle q_2, a_3 \rangle q_2 \\ &= (-2, 5, 8, -1)^t - 9 \cdot \frac{1}{6}(1, 3, 5, -1)^t - \sqrt{13} \cdot \frac{1}{2\sqrt{13}}(-7, 1, 1, 1)^t \\ &= (0, 0, 0, 0)^t \quad \text{abandon} \quad (+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_3 &= a_4 - \langle q_1, a_4 \rangle q_1 - \langle q_2, a_4 \rangle q_2 \\ &= (-1, -3, 4, 5)^t - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}(1, 3, 5, -1)^t - \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{13}}(-7, 1, 1, 1)^t \\ &= \frac{11}{18}(1, -6, 5, 8)^t \rightarrow \frac{1}{3\sqrt{14}}(1, -6, 5, 8)^t \quad (+3) \end{aligned}$$

- (b) (+5) 將上面算出的正交基單位化，便帶出一「QR-分解」 $A = QR$ 。請將 Q, R 明確寫出來 (不要刪 A 的行!)

$$\begin{aligned} \text{(sol.) 由 (a), } a_1 &= \langle a_1, q_1 \rangle q_1 = 6q_1 \\ a_2 &= \langle a_2, q_1 \rangle q_1 + \langle a_2, q_2 \rangle q_2 = 3q_1 + \sqrt{13}q_2 \\ a_3 &= \langle a_3, q_1 \rangle q_1 + \langle a_3, q_2 \rangle q_2 + \langle a_3, q_3 \rangle q_3 = 9q_1 + \sqrt{13}q_2 + 0q_3 \\ a_4 &= \langle a_4, q_1 \rangle q_1 + \langle a_4, q_2 \rangle q_2 + \langle a_4, q_3 \rangle q_3 = \frac{5}{6}q_1 + \frac{\sqrt{13}}{2}q_2 + \frac{11\sqrt{14}}{6}q_3, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \underbrace{[a_1 | a_2 | a_3 | a_4]}_A = \underbrace{[q_1 | q_2 | q_3]}_{\substack{Q \text{ as in (a)} \\ (+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & 5/6 \\ 0 & \sqrt{13} & \sqrt{13} & \sqrt{13}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 11\sqrt{14}/6 \end{bmatrix}}_{\substack{R \\ (+4)}}$$

- (c) (+6) 求 $\text{col}(A)^\perp$ ，即 $\text{col}(Q)^\perp$ (只管比例 算起來就簡單)。

$$\begin{aligned} \text{(sol.) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & -6 & 5 & 8 \\ -7 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -9 & 0 & 9 \\ 0 & 22 & 36 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & 18 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 18 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/9 \end{bmatrix} \quad \text{到此4分,} \\ \therefore \text{col}(A)^\perp &= \text{col}(Q)^\perp = \text{null}(Q^t) = \langle (2, 9, -4, 9)^t \rangle \quad (+2) \end{aligned}$$

7. (+3) $A_{n \times n}$ ，證明： $A^t A = I \iff AA^t = I$ —— orthogonal 矩陣的等價定義，我提醒過你們兩次了!

(sol.) $A^t A = I \Rightarrow AA^t = AA^t AA^t = (AA^t)^2 \Rightarrow AA^t = I$ or 0 (不可能)。(況且，方陣 A^t 為方陣 A 之左逆，則 A 之右逆必為 A^t ，即 A 與 A^t 為互逆之方陣。)

8. (+4) $M := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ 求 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := \det(I + M)$ 。 §4.2#32

$$\begin{aligned} \text{(sol.) } f(\mathbf{x}) &= \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4+1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+1 & x_2+1 & x_3 & x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+1 & x_2 & x_3+1 & x_4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+1 & x_2 & x_3 & x_4+1 \end{vmatrix} \quad (+1) = (x_1+x_2+x_3+x_4+1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2+1 & x_3 & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3+1 & x_4 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_4+1 \end{vmatrix} \quad (+1) \\ &= (x_1+x_2+x_3+x_4+1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (+1) = (x_1+x_2+x_3+x_4+1)(+1) \end{aligned}$$

9. (+4) $A = [a_1 | a_2 | a_3 | a_4]$, $\det A = 8$, 求 $\det(a_1 + a_2 | a_2 + a_3 | a_3 + a_4 | a_4 + a_1)$ 。 §4.2#33

$$\begin{aligned} \text{(sol.) } \underbrace{[a_1 + a_2 | a_2 + a_3 | a_3 + a_4 | a_4 + a_1]}_C &= A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_B \quad (+2) \text{ 且 } \det B = 0 \quad (+1), \\ \text{故 } \det C &= \det A \cdot \det B = 0 \quad (+1). \end{aligned}$$

10. (+5) 令 $A_1 := [1]$, $A_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\dots$, ($n > 2$ 時 A_n 為 $n \times n$ 三平行對角線全是 1 的三對角線矩陣) 且令 $d_n := \det A_n$. 可將 A_n 依第一列展開, 證明 $d_1 = 1$, $d_2 = 0$, $n > 2$ 時, $d_n = d_{n-1} - d_{n-2}$. §4.3#5

$$\begin{aligned} (sol.) \quad d_n &= 1 \cdot d_{n-1} - 1 \cdot \det \left[e_1 \left| \begin{array}{c|c} e_1+e_2+e_3 & e_2+e_3+e_4 \cdots e_{n-3}+e_{n-2}+e_{n-1} \\ \hline e_{n-2}+e_{n-1} \end{array} \right. \right]_{(n-1) \times (n-1)} \quad (+2) \\ &= d_{n-1} - d_{n-2} + 1 \cdot \det \left[0 \left| \begin{array}{c|c} e_1+e_2+e_3 & e_2+e_3+e_4 \cdots e_{n-4}+e_{n-3}+e_{n-2} \\ \hline e_{n-3}+e_{n-2} \end{array} \right. \right]_{(n-2) \times (n-2)} \quad (+2) \\ &= d_{n-1} - d_{n-2} + 0 \quad (+1) \end{aligned}$$

11. (+5) 如何達成 $A_{4 \times 4}$ 裡 0 元素越少越好 且 $\det A = 0$? §4.3#15

(sol.) 4 個零在 A 的同一列或同一行即可。(+)2

如何達成 $B_{4 \times 4}$ 裡 0 元素越多越好 且 $\det B \neq 0$?

(sol.) 4 個非零在 B 的 $(\sigma(1), 1), \dots, (\sigma(4), 4)$ 位置即可 (σ : 任何 1, 2, 3, 4 的重排) (+2), 至多 12 個零。(+)1

12. (+6) A 可逆, 於是 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & S \end{pmatrix}$, 其中 $S = D - CA^{-1}B$ — 這消掉 C 的招早會了吧? 如果其餘的 B, C, D 也是方的, 用這招證明: $\left| \begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix} \right| = |AD - CB|$ ($\neq |AD - BC|, |DA - BC|, |DA - CB|, |A||D| - |C||B|$!) §4.3#34,35

(sol.) 很清楚地, $\left| \begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & S \end{smallmatrix} \right| = |A| \cdot |S|$

13. (+11) $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $c_{i,j}$ 為 $a_{i,j}$ 的 cofactor, $C = (c_{i,j})_{i,j=1}^n$. §4.4#18

(a) 寫出 A 與 C 之間的關係式。要寫理由。

(sol.) $\det A$ 對第 i 列展開: $\det A = a_{i,1}c_{i,1} + \dots + a_{i,n}c_{i,n} \quad \forall i = 1, \dots, n$ (+2), 令 B 為 A 的第 i 列以列向量 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ 取代, 則 $\det B = b_1c_{i,1} + \dots + b_nc_{i,n}$, 若使列向量 $\mathbf{b}$ 與 A 的第 k 列內容相同, 則 $\det B = 0$ (+2) 即: $a_{i,1}c_{j,1} + \dots + a_{i,n}c_{j,n} = \begin{cases} \det A & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$, 因此 $\det(A) I = AC^t$ (+2)。

(b) 如果 A 的所有 cofactors 都是 0, 請問 A 可逆嗎? 要寫理由。

(sol.) $\det(A) I = AC^t = A0$, 故 $\det A = 0$. (+1) 所以: C 可逆 iff A 可逆。(+)1

(c) 如果 A 的所有 cofactors 都不是 0, 請問 A 可逆嗎? 要寫理由。

(sol.) 不見得。rank($A_{n \times n}$) = $n - 1$ (+2), 例如, #9 裡 rank 3 的 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 它的 cofactor 矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 元素全部非零。} (+1)$$