

《範例》 將 $A = \begin{bmatrix} -10 & -1 & -2 & 8 \\ 50 & 6 & 8 & -32 \\ 19 & 0 & 6 & -12 \\ -7 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ 逐步化為 Jordan form。

第一, 求特徵多項式

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -10-\lambda & -1 & -2 & 8 \\ 50 & 6-\lambda & 8 & -32 \\ 19 & 0 & 6-\lambda & -12 \\ -7 & -1 & -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10-\lambda & -1 & -2 & 8 \\ 50 & 6-\lambda & 8 & -32 \\ 19 & 0 & 6-\lambda & -12 \\ \lambda+3 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(-1) \begin{vmatrix} 50 & 8 & -32 \\ 19 & 6-\lambda & -12 \\ \lambda+3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + (6-\lambda) \begin{vmatrix} -10-\lambda & -2 & 8 \\ 19 & 6-\lambda & -12 \\ \lambda+3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= [(50-32)\lambda^2 + (-5\cdot 50 - 8\cdot 12 + 3\cdot 32 + 19\cdot 8)\lambda + (-50\cdot 6 - 19\cdot 32 - 3\cdot 8\cdot 12 + 3\cdot 6\cdot 32 + 50\cdot 12 + 19\cdot 8)] \\ &\quad + (6-\lambda) [(-1)\lambda^3 + (-10+6-1+8)\lambda^2 + (6\cdot 10 + 60 + 24 - 24 - 12 - 38)\lambda + (60 + 19\cdot 8 + 3\cdot 2\cdot 12 - 3\cdot 6\cdot 8 - 120 - 38)] \\ &= [18\lambda^2 - 98\lambda + 132] + (6-\lambda)[- \lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 18] \\ &= \lambda^4 - 9\lambda^3 + 30\lambda^2 - 44\lambda + 24 \\ &= (\lambda - 2)^3(\lambda - 3) \end{aligned}$$

自己多寫前兩列方便展開

第二, 給出各個 (generalized) eigenspace (即 $\ker(A - \lambda I)^i$) 的生成元

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -12 & -1 & -2 & 8 \\ 50 & 4 & 8 & -32 \\ 19 & 0 & 4 & -12 \\ -7 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{⑧: 記錄列運算}]{\text{簡化為 reduced row echelon form}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 即 } \ker(A - 2I) = \langle (0, 2, 3, 1)^t \rangle,$$

令 $v_1 \in \ker(A - 2I) \setminus \{0\}$, 則 $v_1 = (0, 2, 3, 1)^t x_4$, 取 $v_1 = (0, 2, 3, 1)^t$;

令 $v_2 \in \ker(A - 2I)^2 \setminus \ker(A - 2I)$ 且要求 $(A - 2I)v_2 = v_1$, (對 v_1 做 ⑧ 得 $(1, -4, -4, 0)^t$)
即 $v_2 = (0, 2, 3, 1)^t x_4 + (1, -4, -4, 0)^t$, 取最簡單的 $v_2 = (1, -4, -4, 0)^t$ 即可;

令 $v_3 \in \ker(A - 2I)^3 \setminus \ker(A - 2I)^2$ 且要求 $(A - 2I)v_3 = v_2$, (對 v_2 做 ⑧ 得 $(0, 1, -1, 0)^t$)
即 $v_3 = (0, 2, 3, 1)^t x_4 + (0, 1, -1, 0)^t$, 取最簡單的 $v_3 = (0, 1, -1, 0)^t$ 即可。

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -13 & -1 & -2 & 8 \\ 50 & 3 & 8 & -32 \\ 19 & 0 & 3 & -12 \\ -7 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{簡化為 reduced row echelon form}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $v_4 \in \ker(A - 3I) \setminus \{0\}$, 則 $v_4 = (0, 0, 4, 1)^t x_4$, 取 $v_4 = (0, 0, 4, 1)^t$ 。

第三, 將 A 化成 Jordan form

由此可知, 不必算 $\ker(A - 2I)^2, \ker(A - 2I)^3$, 從以上算式也能看出 $\ker(A - 2I)^2$ 比 $\ker(A - 2I)^1$ 多一維, $\ker(A - 2I)^3$ 比 $\ker(A - 2I)^2$ 多一維的, 同時也能看出 最小多項式 $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 3)$ 。

$$\text{於是得到一組線性獨立的 } S := [v_1 | v_2 | v_3 | v_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 且 } \begin{aligned} Av_1 &= 2v_1 \\ Av_2 &= 2v_2 + v_1 \\ Av_3 &= 2v_3 + v_2 \\ Av_4 &= 3v_4 \end{aligned}.$$

$$\text{即: } AS = SJ, J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

[註解一] 注意: S 不是唯一的。eigenvector v_1, v_4 不變, 即使 generalized eigenvector v_2, v_3 取的不同, 如 $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, 雖然不同於前面的 S , 但 J 還是一模一樣。

[註解二] ⑨: 簡化為 reduced row echelon form 的列運算過程

$$\begin{aligned} \text{消第一行} \quad & \begin{matrix} r_2 := r_2 + r_1 \cdot 3 + r_4 \cdot 2, \\ r_3 := r_3 + r_1 + r_4, \end{matrix} \begin{bmatrix} -12 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -7 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} r_1 := r_1 \cdot (-3) + r_4 \cdot 5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -7 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} r_4 := r_4 + r_1 \cdot 7 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -15 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \\ \text{消第二行} \quad & \begin{matrix} r_2 := -r_2, \\ r_3 := r_3 + r_2 \cdot 2, \\ r_4 := r_4 + r_2 \cdot 15 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}, \text{消第三行} \quad \begin{matrix} r_4 := r_4 - r_3 \cdot 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{回消: } \begin{matrix} r_1 := r_1 + r_2 \cdot 2 - r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即: 我的 ⑨ 依序是 $\begin{matrix} r_2 := r_2 + r_1 \cdot 3 + r_4 \cdot 2, \\ r_3 := r_3 + r_1 + r_4, \\ r_1 := r_1 \cdot (-3) + r_4 \cdot 5, \\ r_4 := r_4 + r_1 \cdot 7, \end{matrix} \quad \begin{matrix} r_2 := -r_2, \\ r_3 := r_3 + r_2 \cdot 2, \\ r_4 := r_4 + r_2 \cdot 15, \end{matrix} \quad \begin{matrix} r_4 := r_4 - r_3 \cdot 6, \\ r_1 := r_1 + r_2 \cdot 2 - r_3, \end{matrix}$ 不可亂調順序。

[註解三] $(A - 2I)x = 0$ 經過 ⑨ 後即 $\begin{matrix} x_1 = 0, \\ x_2 = 2x_4, \\ x_3 = 3x_4, \end{matrix}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$, 即 $\ker(A - 2I) = \langle (0, 2, 3, 1)^t \rangle$ 。

$\ker(A - 2I)v_2 = v_1$, $\ker(A - 2I)v_3 = v_2$ 經過 ⑨ 後 也一樣明顯, 不再贅言。

[註解四] 最好別像下面那樣算 generalized eigenspaces。不是不對, 是計算的量太大了:

$$\begin{aligned} A - 2I &= \begin{bmatrix} -12 & -1 & -2 & 8 \\ 50 & 4 & 8 & -32 \\ 19 & 0 & 4 & -12 \\ -7 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow \ker(A - 2I) = \langle (0, 2, 3, 1)^t \rangle, \\ (A - 2I)^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -2 & -4 & 16 \\ -68 & -7 & -10 & 44 \\ -20 & -2 & -3 & 13 \end{bmatrix} \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow \ker(A - 2I)^2 = \langle (-1, 4, 4, 0)^t, (3, -4, 0, 4)^t \rangle, \\ (A - 2I)^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & -4 & -4 & 20 \\ -8 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 & -5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Rightarrow \ker(A - 2I)^3 = \langle (-1, 8, 0, 0)^t, (-1, 0, 8, 0)^t, (5, 0, 0, 8)^t \rangle \end{aligned}$$

, 雖然 $v_1 \in \ker(A - 2I) \setminus \{0\}$ 很好選, 但『 $v_2 \in \ker(A - 2I)^2 \setminus \ker(A - 2I)$ 且 $(A - 2I)v_2 = v_1$ 』還沒做, 『 $v_3 \in \ker(A - 2I)^3 \setminus \ker(A - 2I)^2$ 且 $(A - 2I)v_3 = v_2$ 』也還沒做呢!