

Example 8. 回去看 (例二) 的 $\chi_A(t) = (t-p)^4$, $\mu_A(t) = (t-p)^2$, $N_{A,p}^{(1)} < N_{A,p}^{(2)}$: 從基的觀點來看:

若 $(d_1, d_2) = (3, 4)$, 則有 $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = N_{A,p}^{(1)}$, $v_4 \in N_{A,p}^{(2)} \setminus N_{A,p}^{(1)}$ 使得 $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^4$.

取 $(A-pI)v_4 = v_3$, 則 A 以 v_1, v_2, v_3, v_4 為基的矩陣表示為 $\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_A(t) = (t-p)^2$.

若 $(d_1, d_2) = (2, 4)$, 則有 $\langle v_1, v_3 \rangle = N_{A,p}^{(1)}$, $v_2, v_4 \in N_{A,p}^{(2)} \setminus N_{A,p}^{(1)}$ 使得 $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^4$.

取 $\begin{cases} (A-pI)v_2 = v_1 \\ (A-pI)v_4 = v_3 \end{cases}$, 則 A 以 v_1, v_2, v_3, v_4 為基的矩陣表示為 $\begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_A(t) = (t-p)^2$.

若 $(d_1, d_2) = (1, 4)$, 則有 $\langle v_1 \rangle = N_{A,p}^{(1)}$, $v_2, v_3, v_4 \in N_{A,p}^{(2)} \setminus N_{A,p}^{(1)}$ 使得 $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^4$.

$\begin{cases} (A-pI)v_2 = v_1 \\ (A-pI)v_3 = v_1 \\ (A-pI)v_4 = v_1 \end{cases}$ (到此已然矛盾), 則 A 以 v_1, v_2, v_3, v_4 為基的矩陣表示為 $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$,

即使 $\mu_A(t) = (t-p)^2$, 還是矛盾 (因為 $\underbrace{(1,0,0,0)^t}_{v_1}, \underbrace{(0,1,-1,0)^t}_{v_2-v_3}, \underbrace{(0,0,1,-1)^t}_{v_3-v_4} \in \ker(A-pI) \Rightarrow d_1 = 3$)

T 是 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的線性變換, 令 $K_j = \ker(T^j)$ 。很明顯地, $K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq \mathbb{R}^n$ 。

說: 有某個 i 會使得 $K_1 < \dots < K_i = K_{i+1}$ 。如果以為 $K_{i+1} < K_{i+2}$, 即 $K_{i+2} \setminus K_{i+1}$ 非空, 就找得到 $v \in K_{i+2} \setminus K_{i+1}$, 即 $0 = T^{i+2}v = T^{i+1}Tv$, 即 $Tv \in K_{i+1} = K_i$ ($v \notin K_{i+1} \Rightarrow v \notin K_1 \Leftrightarrow Tv \neq 0$), 就是說 $T^i(Tv) = T^{i+1}v = 0 \Leftrightarrow v \in K_{i+1}$, 與 $v \in K_{i+2} \setminus K_{i+1}$ 矛盾。所以一旦有某個 i 使得 $K_1 < \dots < K_i = K_{i+1}$, 則必然 $K_1 < \dots < K_i = K_{i+1} = K_{i+2} = \dots$ 。

定義: T 為 k 次冪零 (*nilpotent*): 存在一最小正整數 k 使得 $T^k = 0$ 。

若 T 為 k 次冪零, 則 $I, T, T^2, \dots, T^{k-1}$ 為線性獨立:

$$\begin{aligned} \text{若 } c_0I + c_1T + c_2T^2 + \dots + c_{k-1}T^{k-1} &= 0, & \xrightarrow{T^{k-1}} & c_0T^{k-1} = 0, & \Rightarrow c_0 = 0, \\ \text{剩下的 } c_1T + c_2T^2 + \dots + c_{k-1}T^{k-1} &= 0, & \xrightarrow{T^{k-2}} & c_1T^{k-1} = 0, & \Rightarrow c_1 = 0, \\ & & \vdots & & \vdots \\ \text{剩下的 } c_{k-1}T^{k-1} &= 0, & \xrightarrow{T^0} & c_{k-1}T^{k-1} = 0, & \Rightarrow c_{k-1} = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

所以 $v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v$ 線性獨立是必然的 (前提是全是非零向量), 即使把零向量去掉向量, 雖然線性獨立的部分集合還是線性獨立, 但問題是沒法做基也就沒多大用處了。因此我們想要找到一串是不會變成零向量的。

例如, T 為 4 次冪零, 則 $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$, 若選 $v \in K_1 \Rightarrow 0 = Tv = T^2v = T^3v$; 這些選擇
若選 $v \in K_2 \setminus K_1 \Rightarrow 0 = T^2v = T^3v$;
若選 $v \in K_3 \setminus K_2 \Rightarrow 0 = T^3v$;

都不好。只剩下 $v \in K_4 \setminus K_3$ 了: 很清楚地, 因為 $0 = T^4(v) = T^3(Tv) = T^2(T^2v) = T(T^3v)$, 所以 $Tv \in K_3 \setminus K_2$, $T^2v \in K_2 \setminus K_1$, $T^3v \in K_1$, 是從外層往裡層跳的, 如圖示。

$$\left(\left(\left(\left(T^3v \right)_{K_1} \right)_{K_2} \right)_{K_3} \right)_{K_4} v$$

若在某 K_i 層裡, 有 $v_1, \dots, v_m \in K_i \setminus K_{i-1}$ 為線性獨立, 則

$$\begin{array}{cccccc}
 v_1, & Tv_1, & T^2v_1, & \dots, & T^{i-2}v_1 & T^{i-1}v_1 & \text{線性獨立,} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 v_m, & Tv_m, & T^2v_m, & \dots, & T^{i-2}v_m & T^{i-1}v_m & \text{線性獨立,} \\
 \in & \in & \in & & \in & \in & \\
 K_i \setminus K_{i-1} & K_{i-1} \setminus K_{i-2} & K_{i-2} \setminus K_{i-3} & & K_2 \setminus K_1 & K_1 &
 \end{array}$$

類似前面的討論, 就會得到 這 $i \cdot m$ 根向量 是線性獨立的 ■。

此外, 特別值得注意的是:

『若某 i 層比它的前一層多 m 維, 則 i 裡面的每一層也至少要比它的前一層多 m 維!』
也就是說, 令維數差 $\Delta_1 := d_1$, $\Delta_i := d_i - d_{i-1}$ for $i = 2, 3, 4, \dots$, 則 $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots \geq \Delta_i$ 。

簡寫: $K_i = N_{A,p}^{(i)} = \ker(A - pI)^i$, $d_i = \dim K_i$ 。現在可以輕鬆判定維數了吧?

Example 9. 再回到 (例二): $\chi_A(t) = (t - p)^4$, $\mu_A(t) = (t - p)^2 \Rightarrow d_1 < d_2 = 4$ 。

從維數看, $(d_1, d_2) = (3, 4)$ 是可能的; $\left(((*)_{K_1} *)_{K_2} \right)_{K_3} \quad 3 \geq 1$

$(d_1, d_2) = (2, 4)$ 是可能的; $\left((**)_{K_1} ** \right)_{K_2} \quad 2 \geq 2$

$(d_1, d_2) = (1, 4)$ 是不可能的。 $\left((*)_{K_1} *** \right)_{K_2} \quad 1 \not\geq 3$

Example 10. 再回到 (例三): $\chi_A(t) = (t - p)^4$, $\mu_A(t) = (t - p)^3 \Rightarrow d_1 < d_2 < d_3 = 4$ 。

從維數看, $(d_1, d_2, d_3) = (2, 3, 4)$ 是可能的; $\left(\left((**)_{K_1} *)_{K_2} * \right)_{K_3} \right)_{K_4} \quad 2 \geq 1 \geq 1$

$(d_1, d_2, d_3) = (1, 3, 4)$ 是不可能的; $\left(\left((*)_{K_1} ** \right)_{K_2} * \right)_{K_3} \quad 1 \not\geq 2 \geq 1$

$(d_1, d_2, d_3) = (1, 2, 4)$ 是不可能的。 $\left(\left((*)_{K_1} *)_{K_2} ** \right)_{K_3} \right)_{K_4} \quad 1 \geq 1 \not\geq 2$

現在懂了嗎? 相信 (例六)(例七) 或其他的 也應該沒什麼問題才是。