

χ_A : A 的特徵多項式, μ_A : A 的最小多項式, 爲了減省符號, 我們令 $N_{A,\lambda}^{(i)} := \text{null}(A - \lambda I)^i = \ker(A - \lambda I)^i$ 稱爲 A 對應於特徵值 λ 的 *generalized eigenspaces*。 $N_{A,\lambda}^{(1)}$ 則是 A 對應於特徵值 λ 真正的 eigenspace。很明顯地, 對應於特徵值 λ 的 *generalized eigenspaces* 有層層包含的關係:

$$N_{A,\lambda}^{(1)} \leq N_{A,\lambda}^{(2)} \leq N_{A,\lambda}^{(3)} \leq N_{A,\lambda}^{(4)} \leq \dots$$

但是不可能越來越大, 至少不會超過全空間。所以 $\leq$ 就顯得有點含糊不清, 要說清楚究竟是 $<$ 還是 $=$ 。

根據 χ_A 和 μ_A 一定可以把 $N_{A,\lambda}^{(i)}$ 的包含關係說得清楚, 但是 確實的維數 有時候不見得說得清楚。爲了簡單起見, 先考慮 χ_A 全是實根的例子。

Example 1. 若 $\chi_A(t) = (t - p)^4$, $\mu_A(t) = (t - p)^1$, 則

$$\begin{array}{c} \text{子空間} \\ \text{維數} \end{array} \quad \begin{array}{c} N_{A,p}^{(1)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,p}^{(2)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,p}^{(3)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,p}^{(4)} \\ 4 \end{array} = \dots$$

一次方殺得掉的, 就不必用兩次方殺。

Example 2. 若 $\chi_A(t) = (t - p)^4$, $\mu_A(t) = (t - p)^2$, 則

$$\begin{array}{c} \text{子空間} \\ \text{維數} \end{array} \quad \begin{array}{c} N_{A,p}^{(1)} \\ 3? \\ 2? \\ 1? \end{array} < \begin{array}{c} N_{A,p}^{(2)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,p}^{(3)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,p}^{(4)} \\ 4 \end{array} = \dots$$

兩次方才殺得掉的, 一次方未必殺得掉; 兩次方殺得掉的, 就不必用三次方殺。

Example 3. 若 $\chi_A(t) = (t - p)^4$, $\mu_A(t) = (t - p)^3$, 則

$$\begin{array}{c} \text{子空間} \\ \text{維數是} \end{array} \quad \begin{array}{c} N_{A,p}^{(1)} \\ 2? \\ 1? \\ 1? \end{array} < \begin{array}{c} N_{A,p}^{(2)} \\ 3? \\ 3? \\ 2? \end{array} < \begin{array}{c} N_{A,p}^{(3)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,p}^{(4)} \\ 4 \end{array} = \dots$$

三次方才殺得掉的, 一次、二次未必殺得掉; 三次方殺得掉的, 就不必用四次方殺。

Example 4. 若 $\chi_A(t) = (t - p)^4$, $\mu_A(t) = (t - p)^4$, 則

$$\begin{array}{c} \text{子空間} \\ \text{維數是} \end{array} \quad \begin{array}{c} N_{A,p}^{(1)} \\ 1 \end{array} < \begin{array}{c} N_{A,p}^{(2)} \\ 2 \end{array} < \begin{array}{c} N_{A,p}^{(3)} \\ 3 \end{array} < \begin{array}{c} N_{A,p}^{(4)} \\ 4 \end{array} = \dots$$

四次方才殺得掉的, 一次、二次、三次未必殺得掉; 四次方殺得掉的, 就不必用五次方殺。

$p \neq q$ — 有兩組 generalized eigenspaces

Example 5. 若 $\chi_A(t) = (t - p)^3(t - q)^4$, $\mu_A(t) = (t - p)^1(t - q)^1$, 則

$$\begin{array}{c} \text{子空間} \\ \text{維數是} \end{array} \quad \begin{array}{c} N_{A,p}^{(1)} \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,p}^{(2)} \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,p}^{(3)} \\ 3 \end{array} = \dots$$

$$\begin{array}{c} \text{子空間} \\ \text{維數是} \end{array} \quad \begin{array}{c} N_{A,q}^{(1)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,q}^{(2)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,q}^{(3)} \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} N_{A,q}^{(4)} \\ 4 \end{array} = \dots$$

Example 6. 若 $\chi_A(t) = (t-p)^3(t-q)^4$, $\mu_A(t) = (t-p)^2(t-q)^2$, 則

$$\begin{array}{c} \text{子空間 } N_{A,p}^{(1)} < N_{A,p}^{(2)} = N_{A,p}^{(3)} = \dots \\ \text{維數是 } 2? \quad 3 \\ 1? \\ \text{子空間 } N_{A,q}^{(1)} < N_{A,q}^{(2)} = N_{A,q}^{(3)} = N_{A,q}^{(4)} = \dots \\ \text{維數是 } 3? \quad 4 \\ 2? \\ 1? \end{array}$$

Example 7. 若 $\chi_A(t) = (t-p)^3(t-q)^4$, $\mu_A(t) = (t-p)^3(t-q)^3$, 則

$$\begin{array}{c} \text{子空間 } N_{A,p}^{(1)} < N_{A,p}^{(2)} < N_{A,p}^{(3)} = \dots \\ \text{維數是 } 1 \quad 2 \quad 3 \\ \text{子空間 } N_{A,q}^{(1)} < N_{A,q}^{(2)} < N_{A,q}^{(3)} = N_{A,q}^{(4)} = \dots \\ \text{維數是 } 2? \quad 3? \quad 4 \\ 1? \quad 3? \\ 1? \quad 2? \end{array}$$

『一旦等於, 後面的也都等於了』— 是這樣嗎? 維數要如何確定?

爲減省符號, 令 $d_i = \dim N_{A,p}^{(i)}$ 。看過下面的情形, 再回去看前面例子裡的問號。

“4”: $A = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ 的 $\chi_A(t) = (t-p)^4$, $\mu_A(t) = (t-p)^4$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$, $d_4 = 4$ 。

“3+1”: $A = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ 的 $\chi_A(t) = (t-p)^4$, $\mu_A(t) = (t-p)^3$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 4$ 。

“2+2”: $A = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ 的 $\chi_A(t) = (t-p)^4$, $\mu_A(t) = (t-p)^2$, $d_1 = 2$, $d_2 = 4$ 。

“2+1+1”: $A = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ 的 $\chi_A(t) = (t-p)^4$, $\mu_A(t) = (t-p)^2$, $d_1 = 3$, $d_2 = 4$ 。

大部分的情況 一定要經過實際的矩陣計算, 並看過了 $N_{A,p}^{(1)}$ 、 $N_{A,p}^{(2)} \setminus N_{A,p}^{(1)}$ 、 $N_{A,p}^{(3)} \setminus N_{A,p}^{(2)}$ 、 $\dots$, 才會知道 $N_{A,p}^{(1)}$, $N_{A,p}^{(2)}$, $N_{A,p}^{(3)}$, $\dots$ 確實的維數。這就是前面例子裡維數爲何無法決定 (不過, 有的情況必定是錯的, 請你找出來)。

本來 Jordan form 就是根據 $N_{A,p}^{(1)}$, $N_{A,p}^{(2)}$, $N_{A,p}^{(3)}$, $\dots$ 的維數差 看出來的。有了 A 的 Jordan form 可輕易得知 χ_A 和 μ_A , 有了 χ_A 和 μ_A 未必可知 A 的 Jordan form。