

我們還是先了解實的方陣再說。

A 是 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的線性變換。若 $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 是 A 的特徵值, 則 $\bar{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 也是 A 的特徵值; 令 λ 對應的特徵向量為 u , 則 $\bar{\lambda}$ 對應的特徵向量必為 $\bar{u}$, 且 $u, \bar{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$; 如果堅持不將 A 看做是 $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 的線性變換, 就應該在 $\mathbb{R}^n$ 裡運作。複數特徵向量的實部和虛部, 就是兩個實向量了: $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$ 。則

$$\begin{aligned} A [\operatorname{Re} u \mid \operatorname{Im} u] &= A \left[\frac{u+\bar{u}}{2} \mid \frac{u-\bar{u}}{2i} \right] \\ &= \left[\frac{Au+A\bar{u}}{2} \mid \frac{Au-A\bar{u}}{2i} \right] \\ &= \left[\frac{\lambda u+\bar{\lambda}\bar{u}}{2} \mid \frac{\lambda u-\bar{\lambda}\bar{u}}{2i} \right] \\ &= \left[\frac{\lambda(\operatorname{Re} u+i\operatorname{Im} u)+\bar{\lambda}(\operatorname{Re} u-i\operatorname{Im} u)}{2} \mid \frac{\lambda(\operatorname{Re} u+i\operatorname{Im} u)-\bar{\lambda}(\operatorname{Re} u-i\operatorname{Im} u)}{2i} \right] \\ &= \left[\left(\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2} \right) \operatorname{Re} u + i \left(\frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2} \right) \operatorname{Im} u \mid \left(\frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2i} \right) \operatorname{Re} u + i \left(\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2i} \right) \operatorname{Im} u \right] \\ &= \left[a \operatorname{Re} u - b \operatorname{Im} u \mid b \operatorname{Re} u + a \operatorname{Im} u \right] \\ &= [\operatorname{Re} u \mid \operatorname{Im} u] \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{即: } \begin{matrix} A & [\operatorname{Re} u \mid \operatorname{Im} u] \\ n \times n & n \times 2 \end{matrix} = \begin{matrix} [\operatorname{Re} u \mid \operatorname{Im} u] & \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ n \times 2 & 2 \times 2 \end{matrix}。$$

問: $\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u$ 一定線性獨立嗎?

假設 $\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u$ 線性相關。則 $\operatorname{Re} u = r \operatorname{Im} u$ for some $r \neq 0$, 則 $u = (r+i)\operatorname{Im} u$ 且 $\bar{u} = (r-i)\operatorname{Im} u$, 即 $u, \bar{u}$ 在 $\mathbb{C}^n$ 裡是線性相關的。

假設 $u, \bar{u}$ 線性獨立, $r_1 \operatorname{Re} u + r_2 \operatorname{Im} u = 0$ for some $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow r_1 \frac{u+\bar{u}}{2} + r_2 \frac{u-\bar{u}}{2i} = 0$, $\Leftrightarrow \underbrace{(r_1 - ir_2)}_c u + (r_1 + ir_2)\bar{u} = 0$, $\Leftrightarrow c = 0$, $\Leftrightarrow r_1, r_2 = 0$ 。

實的 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ 的特徵多項式有一對共軛根 $a \pm ib$, 對應的特徵向量 $u = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $\operatorname{Re} u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \operatorname{Im} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 。

實的 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的特徵多項式有一對共軛根 $2 \pm i$, 對應的特徵向量 $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $\operatorname{Re} u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \operatorname{Im} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 。

所以, 從例子可以看出, $\operatorname{Re} u$ 與 $\operatorname{Im} u$ 不一定正交。

若實的 $A_{3 \times 3}$ 的特徵多項式有一對共軛根與一實根 $a \pm ib, c$ (對應兩複一實的特徵向量 $u, \bar{u} \in \mathbb{C}^3, v \in \mathbb{R}^3$), 則

$$\begin{matrix} A & [\operatorname{Re} u \mid \operatorname{Im} u \mid v] \\ 3 \times 3 & 3 \times 3 \end{matrix} = \begin{matrix} [\operatorname{Re} u \mid \operatorname{Im} u \mid v] & \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \\ 3 \times 3 & 3 \times 3 \end{matrix}$$

問: $\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u, v \in \mathbb{R}^3$ 一定是線性獨立嗎?

若實的 $A_{6 \times 6}$ 的特徵多項式有兩對共軛根與兩實根 $a \pm ib$, $c \pm id$, e , f (對應四複二實的特徵向量 $u, \bar{u}$, $v, \bar{v} \in \mathbb{C}^6$, $w, s \in \mathbb{R}^6$), 則

$$A \begin{bmatrix} \text{Re } u & \text{Im } u & \text{Re } v & \text{Im } v & w & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re } u & \text{Im } u & \text{Re } v & \text{Im } v & w & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

$6 \times 6 \qquad \qquad 6 \times 6 \qquad \qquad \qquad 6 \times 6 \qquad \qquad \qquad 6 \times 6$

問: $\text{Re } u, \text{Im } u, \text{Re } v, \text{Im } v, w, s \in \mathbb{R}^6$ 一定是線性獨立嗎?

若 $A^T = -A$, 則稱 A 為負對稱矩陣 (skew-symmetric)。請問: 若實方陣之最小多項式全是單根, 一定可以被轉換成一個實的負對稱 (skew-symmetric) 方陣嗎?

二元運算 $\langle -, - \rangle$ 滿足下列性質 則稱之為內積:

- 1, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- 2, $\langle x, ay + bz \rangle = a \langle x, y \rangle + b \langle x, z \rangle$
- 3, $\langle ax + by, z \rangle = \bar{a} \langle x, z \rangle + \bar{b} \langle y, z \rangle$
- 4, $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x$
- 5, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

原本內積的定義就有 $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ 這點, 只是因為我們一直在談實的向量, 所以 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ 。但現在實矩陣也會有複數特徵向量, 所以在講到向量內積時, 別忘了加共軛 (conjugate):

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}^T y, \quad \langle y, x \rangle = \bar{y}^T x, \quad \langle Ax, y \rangle = \overline{Ax}^T y = \bar{x}^T \overline{A^T} y = \langle x, A^* y \rangle, \quad \langle x, x \rangle = \bar{x}^T x = \|x\|^2。$$

實對稱矩陣的特徵值一定是實的, 而且不同特徵值對應的特徵向量一定正交: 因為 A 實且對稱, 故 $A^* = \overline{A^T} = A$, 令 λ 為 A 之特徵值, 對應特徵向量 $x \neq 0$,

$$\bar{\lambda} \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, A^* x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle, \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R};$$

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle, \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0;$$

那麼, 負對稱矩陣的特徵值、特徵向量一定有什麼性質嗎?

若 A 為負對稱, 且 $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $\lambda \neq \mu$, $x, y \neq 0$, 則 $\lambda \bar{x}^T y = \overline{(Ax)^T} y = x^T A^T y = -x^T Ay = -\mu x^T y$, 即: $(\lambda + \mu) \langle x, y \rangle = 0, \Leftrightarrow \text{either } \lambda + \mu = 0 \text{ or } \langle x, y \rangle = 0。$