

若 $\mathbf{x}^t A \mathbf{x} = -6x_1^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_5 - 8x_2x_3 + 6x_2x_5 + 7x_3^2 - 8x_4^2 + 10x_4x_5 + 9x_5^2$, 取對稱的 $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$,

類似高斯消去法選主元, 配方只需對 A 的數字部分做計算, 看著 A 的上/下三角 皆可做。

對 $a_{i,i}$ 配	影響位置	對 x_i 配出的方 (同「影響位置」欄主元 $a_{i,i}$ 及 行 i 列 i 元素)
$\begin{bmatrix} -6 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ -2 & -4 & 7 & & \\ 0 & 0 & 0 & -8 & \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$	$a_{5,5}=9$ 要減掉 (9) $\begin{bmatrix} (\frac{1}{9})^2 & & & & \\ \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} & (\frac{1}{3})^2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{9} & \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9} & 0 & (\frac{5}{9})^2 & \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{9} & 1 \end{bmatrix}$	$(9)(\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{9}x_4 + x_5)^2$
$\begin{bmatrix} -\frac{55}{9} & & & & \\ -\frac{1}{3} & -1 & & & \\ -2 & -4 & 7 & & \\ -\frac{5}{9} & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{97}{9} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$a_{2,2}=-1$ 要減掉 $(-1) \begin{bmatrix} (\frac{1}{3})^2 & & & & \\ \frac{1}{3} & 1 & & & \\ \frac{1}{3} \cdot 4 & 4 & (4)^2 & & \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 4 \cdot \frac{5}{3} & (\frac{5}{3})^2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$(-1)(\frac{1}{3}x_1 + x_2 + 4x_3 + \frac{5}{3}x_4)^2$
$\begin{bmatrix} -6 & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ -\frac{2}{3} & \cdot & 23 & & \\ 0 & \cdot & \frac{20}{3} & -8 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$a_{3,3}=23$ 要減掉 (23) $\begin{bmatrix} (\frac{-2}{69})^2 & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ -\frac{2}{69} & \cdot & 1 & & \\ -\frac{2}{69} & \frac{20}{69} & \cdot & \frac{20}{69} & (\frac{20}{69})^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$(23)(\frac{-2}{69}x_1 + x_3 + \frac{20}{69}x_4)^2$
$\begin{bmatrix} -\frac{1246}{207} & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \frac{40}{207} & \cdot & \cdot & -\frac{2056}{207} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$a_{1,1}=\frac{-1246}{207}$ 要減掉 $(\frac{-1246}{207}) \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ -\frac{20}{623} & \cdot & \cdot & (\frac{-20}{623})^2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$	$(\frac{-1246}{207})(x_1 - \frac{20}{623}x_4)^2$
$\begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{6184}{623} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$		$(\frac{-6184}{623})x_4^2$ 。

自行練習另一種配法 ($x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$), 對照結果:

$$\begin{aligned}
 & 9 \left(\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{9}x_4 + x_5 \right)^2 \\
 & - \frac{97}{9} \left(\frac{5}{97}x_1 + \frac{15}{97}x_2 + x_4 \right)^2 \\
 & + 7 \left(-\frac{2}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + x_3 \right)^2 \\
 & - \frac{2056}{679} \left(\frac{118}{257}x_1 + x_2 \right)^2 \\
 & - \frac{1546}{257} (x_1)^2
 \end{aligned}$$