

配方就是『將二次多項式寫成平方和/差, 要求所有的方都線性無關』。寫出來的方如果線性相關, 就不能稱得上是配方。將平方和的符號記爲 $\otimes(p) = (m, n)$ 配方的結果不是唯一的, 看順序。

基本上只要知道 $(a_1 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j$ 就能做了。

範例一 對 $p(x, y, z) := x^2 - 4xy + 6xz + 20y^2 - 52yz + 40z^2$ 依 $x \rightarrow y \rightarrow z$ 順序進行配方。

$$\begin{aligned}
 p(x, y, z) &= (x^2 - 4xy + 6xz) + 20y^2 - 52yz + 40z^2 \\
 &\quad \text{處理所有含 } x \text{ 的二次項, 決定第一個方 } (*x + *y + *z)^2 \\
 &= (x^2 - 4xy + 6xz + 4y^2 + 9z^2 - 12yz) + (20-4)y^2 + (-52+12)yz + (40-9)z^2 \\
 &\quad \text{一看就知道第一個方是 } (1x - 2y + 3z)^2 \\
 &= (1x - 2y + 3z)^2 + (16y^2 - 40yz) + 31z^2 \\
 &\quad \text{處理所有含 } y \text{ 的二次項, 決定第二個方 } (*y + *z)^2 \\
 &= (1x - 2y + 3z)^2 + (16y^2 - 40yz + 25z^2) + (31-25)z^2 \\
 &\quad \text{一看就知道第二個方是 } (4y - 5z)^2 \\
 &= (1x - 2y + 3z)^2 + (4y - 5z)^2 + 6z^2, \text{ 三個平方和的符號是 } (+, +, +)
 \end{aligned}$$

將獨立變量 x, y, z 類比成標準基 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$,

則 $\begin{bmatrix} x-2y+3z \\ 4y-5z \\ z \end{bmatrix}$ 等同於 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 線性無關的三角列。■

範例二 對 $q(x, y, z) := p(x, y, z) - 8x + 64y - 84z + 45$ 依 $x \rightarrow y \rightarrow z$ 順序進行配方。

$$\begin{aligned}
 \text{範例一} \Rightarrow q(x, y, z) &= [(1x - 2y + 3z)^2 + (4y - 5z)^2 + 6z^2] - 8x + 64y - 84z + 45 \\
 &= (1x - 2y + 3z + a)^2 + (4y - 5z + b)^2 + 6(z + c)^2 + d,
 \end{aligned}$$

則 $(1x - 2y + 3z)2a + (4y - 5z)2b + 6(z)2c + d = -8x + 64y - 84z$, 令 $A = 2a, B = 2b, C = 12c$, 三角列保證線性無關, $\Rightarrow$ 解 A, B, C 存在唯一。上式即 $[A \ B \ C] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-8 \ 64 \ -84]$ 或

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 64 \\ -84 \end{bmatrix}$, $\Leftrightarrow A = -8, \Rightarrow B = 12, \Rightarrow C = 0$ 是唯一解, $\Leftrightarrow (a, b, c) = (-4, 6, 0)$ 是唯一解 $\Rightarrow d = 45 - 4^2 - 6^2 = -7$ 。所以 $q(x, y, z) = (1x - 2y + 3z - 4)^2 + (4y - 5z + 6)^2 + 6z^2 - 7$ 。■

從這兩個例子可以看出: 配方的重點 在於 二次齊次的部分。

那 (配到一半) 沒有平方項的時候 該怎麼辦?

範例三 $xy = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - x^2 - \frac{1}{4}y^2 = (x - \frac{1}{2}y)^2 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ 這是行不通的。不過 $xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2]$ 誰都會湊。一般也就是 $xy = \frac{1}{4a}[(ax+y)^2 - (ax-y)^2]$ 且 $a \neq 0, (a, 1)$ 與 $(a, -1)$ 保證線性無關。

範例四 依範例三, $xy + yz = \frac{1}{4ab}[(ax+by)^2 - (ax-by)^2] + \frac{1}{4cd}[(cy+dz)^2 - (cy-dz)^2]$ 卻是

行不通的, 因為方數多於變量數, 則方必然是線性相關的。即: $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ a & -b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & c & -d \end{bmatrix}$ 必然列線性相關。但是你可以看到, y 出現在兩項裡頭, 所以

$$\begin{aligned} xy + yz &= (xy + yz + y^2 + (\frac{x}{2})^2 + (\frac{z}{2})^2 + \frac{xz}{2}) - y^2 - (\frac{x}{2})^2 - (\frac{z}{2})^2 - \frac{xz}{2} \\ &= (y + \frac{x}{2} + \frac{z}{2})^2 - (\frac{x}{2} + \frac{z}{2})^2 - y^2. \blacksquare \end{aligned}$$

範例五 如果你認為範例四是碰運氣剛好, 那請看這個:

$$\begin{aligned} axy + yz &= (axy + yz + y^2 + (\frac{ax}{2})^2 + (\frac{z}{2})^2 + \frac{axz}{2}) - y^2 - (\frac{ax}{2})^2 - (\frac{z}{2})^2 - \frac{axz}{2} \\ (a \neq 0) &= (y + \frac{ax}{2} + \frac{z}{2})^2 - (\frac{ax}{2} + \frac{z}{2})^2 - y^2. \blacksquare \end{aligned}$$

範例六 如果說 $(x + y)^2 + xy$ 是先對 x 配過方的結果, 這是說不通的。因為在第一個方還沒配出來之前 就應該把含有 x 的項統統用掉。這樣繼續配下去必定失敗。乘開重做:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 + xy &= x^2 + 3xy + y^2 \\ &= \left(x^2 + 3xy + (\frac{3y}{2})^2 \right) + (1 - (\frac{3}{2})^2)y^2 \\ &= (x + \frac{3}{2}y)^2 - \frac{5}{4}y^2 \end{aligned}$$

範例六 如果說 $(x + y)^2 + yz$ 是先對 x 或 y 配一方的結果, 勉強可以, 勉強可以的理由是因為 yz 出兩個方 $(0, a, 1), (0, a, -1)$, 與第一方 $(1, 1, 0)$ 線性無關。你覺得這是不是矇到的?

在第一個方還沒配出來之前, 不就知道 y 有平方項 而且出現最多次嗎? 會去對 x 配方的理由是什麼? 乘開重做:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 + yz &= x^2 + 2xy + y^2 + yz \\ &= \left(y^2 + 2xy + yz + x^2 + (\frac{z}{2})^2 + zx \right) - (\frac{z}{2})^2 - zx \\ &= (y + x + \frac{z}{2})^2 - \left((\frac{z}{2})^2 + zx + x^2 \right) + x^2 \\ &= (y + x + \frac{z}{2})^2 - (x + \frac{z}{2})^2 + x^2 \end{aligned}$$

如果有人跟你說: 目前配方配成 $*(L_1)^2 + \dots + *(L_n)^2 + xy$, 繼續配下去就會失敗, 有這個可能嗎?
($L_1, \dots, L_n$ 線性無關)

現在請你具體給出配方原則。