A 爲方陣。若 $p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{n-1} t^{k-1} + t^k$ 爲首項係數爲 1 的多項式 (monic polynomial) 且 $p(A) = c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{k-1} A^{k-1} + A^k$, 則稱 p 爲「殺 A 多項式」。A 的特徵多項式 (characteristic polynomial) 記爲 $\chi_A(t) := \det(tI - A)$ (首項係數爲 1)。
★ 任給 P 可逆, 則 $P^{-1}AP$ 與 A 的特徵多項式相同, 即 $\det(tI - P^{-1}AP) = \det(tI - A)$。

A 的最小多項式 (minimal polynomial) 爲 殺 A 多項式中 次數最低的, 記爲 $m_A(t)$。
★ m_A 必然整除任何殺 A 多項式, 即: p 殺 A iff m_A 整除 p 。

Cayley-Hamilton 定理: χ_A 殺 A。所以, ★ m_A 必定整除 χ_A。

爲了瞭解矩陣的特徵多項式和最小多項式, 我們先從最簡單的矩陣著手: 重排。因爲作用在向量的左邊, 重排將視爲列重排。重點在於: ★ 每個重排都可以寫成獨立循環的合成。
★ 重排是 orthogonal, 對調是對稱重排的一種。

Example 1. $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (1\ 2)$, 很清楚地, $\chi_E(t) = m_E(t) = t^2 - 1$ 。$A_{5\times5} = (1\ 2) = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $\therefore A^2 = I, \Rightarrow t^2 - 1$ 殺 A。然而 m_A 絕不可能是一次, $m_A(t) = m_E(t) = t^2 - 1$ 。而 χ_A, 根據行列式的定義, 是 5 次的 $\chi_A(t) = m_E(t) \cdot (t-1)^3$。

$A_{n\times n} = (i\ j)$ 且 $1 \le i \ne j \le n$ (i, j 對調)。很明顯地, $A^2 = I$, 因此, $t^2 - 1$ 殺 A。然而 m_A 絕不可能是一次。所以 無論 n 是多少, $m_A(t)$ 必定是 $t^2 - 1$ 。而 χ_A 是 n 次, 所以

$$\begin{aligned} n = 2: &\quad \chi_A(t) = (t^2 - 1) \\ n = 3: &\quad \chi_A(t) = (t^2 - 1)(t - 1) \\ n = 4: &\quad \chi_A(t) = (t^2 - 1)(t - 1)^2 \\ \vdots \end{aligned}$$

Example 2. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (1\ 2\ 3)$ 是長度爲 3 的單一循環, $\therefore P^3 = I, \Rightarrow t^3 - 1$ 殺 P (還不知道 m_P 是幾次之前, 不能斷定 $t^3 - 1$ 就是 $\chi_P(t)$)。而 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$、$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$、$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的 第 $1, 2, 3$ 列上, 1 出現的位置都不相同, 即: $*I + *P + *P^2 \ne 0$, 且 χ_P 是 3 次, 所以 m_P 必爲三次: $\chi_P(t) = m_P(t) = t^3 - 1$。

$A_{n\times n} = (i\ j\ k)$ 是長度爲 3 的單一循環 ($1 \le i, j, k \le n$ 相異)。很明顯地, $A^3 = I$, 因此, $t^3 - 1$ 殺 A。然而 m_A 絕不可能是二次, 因爲在 I, A, A^2 的 第 i, j, k 列上, 1 出現的位置都不相同。所以 無論 n 是多少, $m_A(t)$ 必定是 $t^3 - 1$ 。而 χ_A 是 n 次, 所以

$$\begin{aligned} n = 3: &\quad \chi_A(t) = (t^3 - 1) \\ n = 4: &\quad \chi_A(t) = (t^3 - 1)(t - 1) \\ n = 5: &\quad \chi_A(t) = (t^3 - 1)(t - 1)^2 \\ \vdots \end{aligned}$$

由前兩例可知, 若重排 $A_{n\times n}$ 是長度爲 k 的單一循環 ($n \ge k$), 則

$$\chi_A(t) = (t^k - 1)(t - 1)^{n-k}, m_A(t) = t^k - 1。$$

Example 3. 以 $n = 5$ 爲例。$A = (1\ 5\ 3)(2\ 4) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$, 雖然 A 分得出 0 區塊: $\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$, 但左上右下對角區塊不是方的,A 減 tI 後, 並不能明顯看出 χ_A 就是 $(1\ 5\ 3)$ 和 $(2\ 4)$ 特徵多項式的乘積。不

過只要將 (1 5 3)(2 4) 裡的 2 5 對調, 就會變成 (1 2 3)(4 5) 了: $P := (2\ 5)$, $P^{-1}AP = (1\ 2\ 3)(4\ 5) = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&|&4&5 \\ 2&3&1&|&5&4 \end{smallmatrix}\right) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ \hline 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$, $P^{-1}AP$ 減去 tI 後, 依照行列式的定義, $\det(P^{-1}AP - tI) = \det(A_1 - tI) \cdot \det(A_2 - tI)$, 所以 $\chi_A(t) = (t^3 - 1)(t^2 - 1)$。

★ 無論重排 A 有幾個循環、長度爲何, 一定找得到重排 P 將 重排 A 的各個循環 變成連號。

Example 4. $A_{n\times n} = (1\ 3)(2\ 4)$ 是長度爲 2,2 的兩個循環 ($n \geq 4$), 它的特徵多項式、最小多項式 與 (1 2)(3 4) 的是一樣的。所以 $\chi_A(t) = (t^2 - 1)(t^2 - 1)(t - 1)^{n-4}$。又 $\mathrm{lcm}(2, 2) = 2, \Rightarrow A^2 = I$, 故 $m_A(t) = t^2 - 1$。

$A_{n\times n} = (1\ 5\ 3)(2\ 4)$ 是長度爲 2,3 的兩個循環 ($n \geq 5$), 它的特徵多項式、最小多項式 與 (1 2 3)(4 5) 的是一樣的。所以 $\chi_A(t) = (t^3 - 1)(t^2 - 1)(t - 1)^{n-5}$。又 $\mathrm{lcm}(2, 3) = 6, \Rightarrow A^6 = I$, 故 $m_A(t)$ 必整除 $t^6 - 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)(t - 1)(t^2 + t + 1)$, 由 χ_A 可知 m_A 裡不會有 $(t^2 - t + 1)$ 的因式, 而 m_A 次數必定 $\geq \max(2, 3)$, 只剩下三個可能:

$(t - 1)(t^2 + t + 1) = t^3 - 1$ — 只殺長 3 循環, 殺不了長 2 循環,
$(t + 1)(t^2 + t + 1)$ — 既殺不了長 3 循環 也殺不了長 2 循環,
只有 $m_A(t) = (t + 1)(t - 1)(t^2 + t + 1)$ 才可長 2 長 3 通殺。

也就是說, 只有《長 3 循環的最小多項式》和《長 2 循環的最小多項式》的《最小公倍式》

$$\mathrm{lcm}(t^3 - 1, t^2 - 1) = (t + 1)(t - 1)(t^2 + t + 1)$$

才可能兩者通殺且次數最低。如果還是不大明白, 請仔細琢磨下面細節:

$$A_{5\times 5} = (1\ 2\ 3)(4\ 5), \quad \begin{aligned} A(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T &= A(x_1,x_2,x_3,0,0)^T + A(0,0,0,x_4,x_5)^T \\ &= (x_2,x_3,x_1,0,0)^T + (0,0,0,x_5,x_4)^T \end{aligned}$$ 的意含是:

若將 $\mathbb{R}^5$ 看成 $U = \langle(*,*,*,0,0)^T\rangle$ 與 $V = \langle(0,0,0,*,*)^T\rangle$ 的和,
$\forall\, u \in U, Au \in U$ 且 $A^3u = u$, 即 $(A^3 - I)u = 0$,
$\forall\, v \in V, Av \in V$ 且 $A^2v = v$, 即 $(A^2 - I)v = 0$,

任給 $x \in \mathbb{R}^5$, 存在 $u \in U$, $v \in V$ 使得 $x = u + v$,

$$\begin{aligned} (A+1)(A-1)(A^2+A+1)\,x &= (A+1)(A-1)(A^2+A+1)\,(u+v) \\ &= (A+1)\underline{(A-1)(A^2+A+1)\,u} + \underline{(A+1)(A-1)}(A^2+A+1)\,\underline{v} \\ &= (A+1)\underline{(A^3-1)\,u} + (A^2+A+1)\underline{(A^2-1)\,v} \\ &= (A+1)\,0 + (A^2+A+1)\,0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以方陣 $(A + 1)(A - 1)(A^2 + A + 1)$ 是零矩陣, 即: $(t + 1)(t - 1)(t^2 + t + 1)$ 殺 A 。

一定要先有辦法知道 特徵多項式 才有辦法算 特徵值, 知道特徵值 才有辦法算 特徵向量。現在來看特徵向量。

Example 5. $A_{4\times 4} = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&4&3 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 2)(3\ 4)$,
$\chi_A(t) = (t^2 - 1)^2 = (t + 1)^2(t - 1)^2$,
$m_A(t) = \mathrm{lcm}(t^2 - 1, t^2 - 1) = t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1)$。

特徵向量 $\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow (1,1,0,0)^T \\ -1 &\leftrightarrow (1,-1,0,0)^T \\ 1 &\leftrightarrow (0,0,1,1)^T \\ -1 &\leftrightarrow (0,0,1,-1)^T \end{aligned}$ 注意: 4 個特徵值裡頭, 實的有 4 個, 且在 m_A 裡是單根。

$$\left.\begin{array}{r} 1 \text{ 的 eigenspace } = \text{null}(A-I) = \langle (1,1,0,0)^T, (0,0,1,1)^T \rangle, \\ -1 \text{ 的 eigenspace } = \text{null}(A+I) = \langle (1,-1,0,0)^T, (0,0,1,-1)^T \rangle, \end{array}\right. \text{構成全 } \mathbb{R}^4\text{, 這時我們稱 } A \text{ 的 eigenspaces}$$

是完備的 (the set of eigenspaces of A is *complete*)。所以可成一組正交基將 A 對角化。

Example 6. $A_{6\times 6} = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6}{4\,5\,6\,1\,2\,3} = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$,

$$\chi_A(t) = (t^2-1)^3 = (t+1)^3(t-1)^3,$$

$$m_A(t) = \text{lcm}(t^2-1, t^2-1, t^2-1) = (t+1)(t-1)\text{。}$$

$$\text{特徵向量} \quad \begin{array}{r} 1 \leftrightarrow (1,0,0,1,0,0)^T \\ -1 \leftrightarrow (1,0,0,-1,0,0)^T \\ 1 \leftrightarrow (0,1,0,0,1,0)^T \\ -1 \leftrightarrow (0,1,0,0,-1,0)^T \\ 1 \leftrightarrow (0,0,1,0,0,1)^T \\ -1 \leftrightarrow (0,0,1,0,0,-1)^T \end{array} \quad \text{注意: 6 個特徵值裡頭, 實的有 6 個, 且在 } m_A \text{ 裡是單根。}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 \text{ 的 eigenspace } = \text{null}(A-I) = \langle (1,0,0,1,0,0)^T, (0,1,0,0,1,0)^T, (0,0,1,0,0,1)^T \rangle, \\ -1 \text{ 的 eigenspace } = \text{null}(A+I) = \langle (1,0,0,-1,0,0)^T, (0,1,0,0,-1,0)^T, (0,0,1,0,0,-1)^T \rangle, \end{array}\right. \text{構成全 } \mathbb{R}^6\text{。}$$

對稱的重排矩陣, cycle 一定全是 2 循環。你觀察到了嗎?

Example 7. $A_{9\times 9} = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}{1\,3\,5\,7\,9\,2\,4\,6\,8} = (1)(2\ 3\ 5\ 9\ 8\ 6)(4\ 7)$,

$$\chi_A(t) = (t-1)(t^6-1)(t^2-1) = (t+1)^2(t-1)^3(t^2-t+1)(t^2+t+1),$$

$$m_A(t) = \text{lcm}(t-1, t^6-1, t^2-1) = t^6-1 = (t+1)(t-1)(t^2-t+1)(t^2+t+1)\text{。}$$

$$\text{特徵向量} \quad \begin{array}{r} 1 \leftrightarrow (1,0,\cdots,0)^T \\ 1 \leftrightarrow (0,1,1,0,1,1,0,1,1)^T \\ -1 \leftrightarrow (0,1,-1,0,1,-1,0,1,-1)^T \\ 1 \leftrightarrow (0,0,0,1,0,0,1,0,0)^T \\ -1 \leftrightarrow (0,0,0,1,0,0,-1,0,0)^T \end{array} \quad \text{注意: 9 個特徵值裡頭, 實的只有 5 個 (雖然在 } m_A \text{ 裡是單根)。}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 \text{ 的 eigenspace } = \text{null}(A-I) = \langle (1,0,0,0,0,0,0,0,0)^T, (0,1,1,0,1,1,0,1,1)^T, (0,0,0,1,0,0,1,0,0)^T \rangle, \\ -1 \text{ 的 eigenspace } = \text{null}(A+I) = \langle (0,1,-1,0,1,-1,0,1,-1)^T, (0,0,0,1,0,0,-1,0,0)^T \rangle, \end{array}\right. \text{不足 } \mathbb{R}^9\text{。}$$