轉動慣量

微質量 dm (質點) 至旋轉軸距離爲 r, 該質點的轉動慣量爲 $r^2\,dm$。
剛體 S 的轉動慣量, 也就是剛體切割後 各個微質量轉動慣量 的總合 — $\int_S r^2\,dm$ (概念式), 實際計算全仰賴切割。

平行軸定理

剛體 S 總質量爲 M, A 軸過剛體質心, B 軸平行於 A 軸 且相距 d, 令剛體繞 A 軸的轉動慣量爲 I_A、繞 B 軸 的轉動慣量爲 I_B, 則 $I_B = I_A + Md^2$。

以 $\mathbb{R}^3$ 物體爲例。不失一般性的情況, 就說「剛體的質心 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ 即原點」、「A 軸即 z-軸」、「B 軸過 $(b_1, b_2, 0)$ 平行 A 軸」吧。則

$$
\begin{aligned}
I_B &= \int_S \left[(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2\right]\,dm \\
&= \underbrace{\int_S (x^2+y^2)\,dm}_{I_A} - 2b_1\underbrace{\int_S x\,dm}_{0} - 2b_2\underbrace{\int_S y\,dm}_{0} + \underbrace{(b_1^2+b_2^2)}_{d^2}\underbrace{\int_S dm}_{M} \\
&= I_A + Md^2
\end{aligned}
$$

一般令 $\|v\| = 1$, $A: p+tv$ 和 $B: q+tv$ 兩平行軸的距離平方爲 $d^2 = \|p-q\|^2 - ((p-q)\bullet v)^2$。假設 $(p-q)\perp v$ 且 p 爲 S 的質心。則 $d^2 = \|p-q\|^2$。位於 x 的質點, 到 A 的距離平方爲 $\|p-x\|^2 - ((x-q)\bullet v)^2$, 到 B 的距離平方爲 $\|x-q\|^2 - ((x-q)\bullet v)^2$, 則

$$
\begin{aligned}
I_B &= \int_S \left(\|x-q\|^2 - [(x-q)\bullet v]^2\right)\,dm \\
&= \int_S \left(\|x-p+p-q\|^2 - [(x-p+p-q)\bullet v]^2\right)\,dm \\
&= \int_S \left(\|x-p\|^2 + 2(x-p)\bullet(p-q) + \|p-q\|^2 - [(x-p)\bullet v + \underbrace{(p-q)\bullet v}_{0}]^2\right)\,dm \\
&= \int_S \left(\|x-p\|^2 - [(x-p)\bullet v]^2 + \|p-q\|^2 + 2(x-p)\bullet(p-q)\right)\,dm \\
&= I_A + Md^2 + 2\int_S (x-p)\bullet(p-q)\,dm \\
&= I_A + Md^2 + 2\underbrace{\int_S (x-p)\,dm}_{\vec{0}}\bullet(p-q)
\end{aligned}
$$

所以, 平行軸定理 $I_B = I_A + Md^2$, 與空間維數、物體維數皆無關。

 mwu@mail.tku.edu.tw

簡單幾何形狀均勻物體的轉動慣量

1. **圓圈** $x^2+y^2=R^2$ (線) 密度=1 對質心 $(0,0)$ 轉: $I_A=\int_0^{2\pi} R^2\cdot\overbrace{R\,dt}^{dm}=2\pi R^3$;

   依平行軸定理, 對任意 (a,b) 轉: $I_B=I_A+\underbrace{2\pi R}_{\text{週長}}(a^2+b^2)$。

   依轉動慣量定義硬算
   $$\begin{aligned} I_B &= \int_0^{2\pi}[(R\cos t-a)^2+(R\sin t-b)^2]r\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}[(R^2+a^2+b^2-2R(a\cos t+b\sin t)]\cdot R\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}R^3dt+(a^2+b^2)\int_0^{2\pi}a\,dt-2R\underbrace{\int_0^{2\pi}(a\cos t+b\sin t)\,dt}_{0} \\ &= I_A+\underbrace{2\pi R}_{\text{週長}}(a^2+b^2) \end{aligned}$$

2. **圓柱殼** 就 ... 上面那個多乘個柱高。

3. **圓盤** $x^2+y^2\le R^2$ (面) 密度=1 對質心 $(0,0)$ 轉: $I_A=\int_0^R r^2\cdot\overbrace{2\pi r\,dr}^{dm}=\frac{\pi R^4}{2}$

   $$\left(\text{或: 由 \#1, } I_A=\int_0^R\underbrace{(2\pi r^3\,dr)}_{\substack{\text{半徑 } r\text{、寬 } dr\\ \text{圓圈帶的轉動慣量}}}=\frac{\pi R^4}{2}\right)\text{。}$$

   依平行軸定理, 對任意 (a,b) 轉, $d:=\sqrt{a^2+b^2}$: $I_B=I_A+\underbrace{\pi R^2}_{\text{面積}}d^2$ 很容易, 但是依轉動慣量定義硬算 I_B 就變得很難: 原問題 I_B 等於『$(x-d)^2+y^2\le R^2$ 對 $(0,0)$ 轉』的轉動慣量,

   $$\begin{aligned} \text{若 } d\ge R\text{, 則 } I_B &= \int_{d-R}^{d+R} r^2\,\overbrace{2\arccos\left(\tfrac{r^2+d^2-R^2}{2rd}\right)r\,dr}^{dm} \\ \text{若 } d< R\text{, 則 } I_B &= \int_0^{R-d}2\pi r^3\,dr+\int_{R-d}^{R+d}r^2\,\overbrace{2\arccos\left(\tfrac{r^2+d^2-R^2}{2rd}\right)r\,dr}^{dm} \end{aligned}$$

   這個不定積分就沒那麼簡單了！

   列式提示: $r^2+2rd\cos t+d^2=R^2$ (*law of cosine*)

   不定積分提示: 用 integration by parts, 給出實際數據比較好做。

   例如 $d=2,\ R=1,\ \Rightarrow 1\le r\le 3$,

   $$\int\arccos(\tfrac{r^2+3}{4r})\,r^3\,dr=\tfrac{r^4}{4}\arccos(\tfrac{r^2+3}{4r})-\tfrac{1}{16}\left(r^2\sqrt{10r^2-r^4-9}+9\sqrt{10r^2-r^4-9}-36\arcsin\tfrac{r^2-5}{4}\right),\ I_B=\tfrac{9\pi}{2}$$

   例如 $d=1,\ R=2,\ \Rightarrow 1\le r\le 3$,

   $$\int\arccos(\tfrac{r^2-3}{2r})\,r^3\,dr=\tfrac{r^4}{4}\arccos(\tfrac{r^2-3}{2r})-\tfrac{1}{16}\left(r^2\sqrt{10r^2-r^4-9}+21\sqrt{10r^2-r^4-9}-96\arcsin\tfrac{r^2-5}{4}\right),\ I_B=12\pi$$

4. **實心圓柱體** 就 ... 上面那個多乘個柱高。

 mwu@mail.tku.edu.tw

5. **空心球** $x^2+y^2+z^2=R^2$ (面) 密度=1 對 $(0,0,*)$ 轉。
由 #1, $\Rightarrow I_A \overset{?}{=} \int_{-R}^{R} 2\pi(\sqrt{R^2-z^2})^3\,dz = \frac{3\pi^2R^4}{4}$??? 依平行軸定理, 對任意 $(a,b,*)$ 轉, $d := \sqrt{a^2+b^2}$: $I_B = I_A + \underbrace{4\pi R^2}_{\text{面積}} d^2$。
原問題 I_B 等於『$(x-d)^2+y^2+z^2=R^2$ 對 $(0,0,*)$ 轉』的轉動慣量。由 # 1 版的平行軸定理,
$$I_B \overset{?}{=} \int_{-R}^{R} \left(2\pi(\sqrt{R^2-z^2})^3 dz + d^2 \underbrace{2\pi\sqrt{R^2-z^2}\,dz}_{z\text{ 圈}} \right) ???$$
這樣對嗎? 不要翻書找公式比對。

6. **實心球** $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ (體) 密度=1 對 $(0,0,*)$ 轉。
由 #3, $I_A \overset{?}{=} \int_{-R}^{R} \frac{\pi(\sqrt{R^2-z^2})^4}{2} dz = \frac{8\pi R^5}{15}$;
依平行軸定理, 對任意 $(a,b,*)$ 轉, $d := \sqrt{a^2+b^2}$: $I_B = I_A + \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{體積}} d^2$。
原問題 I_B 等於『$(x-d)^2+y^2 \le R^2$ 對 $(0,0)$ 轉』的轉動慣量。
由 # 3 版的平行軸定理,
$$I_B \overset{?}{=} \int_{-R}^{R} \left(\frac{\pi(\sqrt{R^2-z^2})^4}{2} dz + d^2 \underbrace{\pi(\sqrt{R^2-z^2})^2\,dz}_{z\text{ 片}} \right) ???$$
這樣對嗎? 不要翻書找公式比對。

7. L 是直線段, A 軸與 L 延伸相交且垂直。這種 L 對 A 轉 的轉動慣量是很容易寫的。那麼, 圓盤的中心的轉動慣量 可 以放射狀切割成 直條對一端的轉動慣量 累加 嗎? 不要翻書找公式比對。