微積分 I 之『微分、導數』 學號_____ 姓名 ***Grading Key*** 分數 **32**

1.**(5)** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos mt-\cos nx}{x^2}$ §4.4 #30

(*sol.*) 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{m+n}{2}x,\sin\frac{m-n}{2}x\ (2)}{\frac{m+n}{2}x\ \ \frac{m-n}{2}x\ (1)}\ \frac{m+n}{2}\frac{m-n}{2}\ (1)$

$=-2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{m^2-n^2}{4}=\frac{n^2-m^2}{2}\ (1)$

(3) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2})^x$ §4.4 #57

(*sol.*) 原式 $=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3x+5}{x^2})^{\frac{x^2}{3x+5}\frac{3x+5}{x}}\ (1)$

$=\lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{3x+5}{x^2})^{\frac{x^2}{3x+5}}\right]^{\frac{3x+5}{x}}\ (1)$

$=e^3\ (1)$

2.**(10)** 求: $2(x^2+y^2)^2=25(x^2-y^2)$ 在哪些點斜率爲零。 §3.6#39

(*sol.*) $\xrightarrow{d(\text{原式})}$ $\underset{(1)}{4(x^2+y^2)}\ \underset{(1)}{(2x\,dx+2y\,dy)}=\underset{(1)}{25(2x\,dx-2y\,dy)}$

$\iff (4x^3+4xy^2-25x)\,dx+(4y^3+25y)\,dy=0\ (1)$

故: 若 $\frac{dy}{dx}=0$ 則 $4x^3+4xy^2-25x=x(4x^2+4y^2-25)=0\ (1)$

$\Rightarrow$ $x=0\Rightarrow y=0$, 但 dx,dy 在此處的關係爲 $0\cdot dx+0\cdot dy=0$, 即導數在 $(0,0)$ 無法定義 (2)

$\begin{cases}x^2+y^2=25/4\\ 2(x^2+y^2)^2=25(x^2-y^2)\end{cases}\Rightarrow\frac{625}{8}=25(2x^2-25)\ (1)\Rightarrow x^2=\frac{75}{16}\Rightarrow y^2=\frac{25}{16}\ (1)$

即: $(\frac{5\sqrt{3}}{4},\frac{5}{4}),(\frac{-5\sqrt{3}}{4},\frac{5}{4}),(\frac{-5\sqrt{3}}{4},\frac{-5}{4}),(\frac{5\sqrt{3}}{4},\frac{-5}{4})$ 四個點斜率爲 0。(1)

3.**(5)** $y=(\ln x)^{\cos x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。 §3.6 #48

(*sol.*) $\ln y=\overbrace{\cos x\cdot\ln(\ln x)}^{u}\ (1)$, $\therefore\ \underset{(1)}{\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}}=\overbrace{\underset{(1)}{-\sin x\cdot\ln(\ln x)}+\underset{(1)}{\cos x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}}^{\frac{du}{dx}}$,

$\therefore\frac{dy}{dx}=(\ln x)^{\cos x}(-\sin x\cdot\ln(\ln x)+\frac{\cos x}{x\ln x})\ (1)$

$\left(\text{或: }\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[e^{\overbrace{\cos x\cdot\ln(\ln x)}^{u}}]\ (1)\ =[e^u]\cdot\frac{du}{dx}\ (1)\text{ , 其餘皆同上}\right)$

4.**(13)** $\frac{d}{dx}[\tan x]=\underline{\sec^2 x}$ $\frac{d}{dx}[\cot x]=\underline{-\csc^2 x}$ $\frac{d}{dx}[\sec x]=\underline{\sec x\tan x}$ $\frac{d}{dx}[\csc x]=\underline{-\csc x\cot x}$

$\frac{d}{dx}[\sin^{-1}x]=\underline{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}x]=\underline{\frac{1}{1+x^2}}$ $\frac{d}{dx}[\sec^{-1}x]=\underline{\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}}$

$\frac{d}{dx}[\sinh x]=\underline{\cosh x}$ $\frac{d}{dx}[\cosh x]=\underline{\sinh x}$ $\frac{d}{dx}[\tanh x]=\underline{\frac{1}{\cosh^2 x}=\operatorname{sech}^2 x}$

$\frac{d}{dx}[\sinh^{-1}x]=\underline{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$ $\frac{d}{dx}[\cosh^{-1}x]=\underline{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$ $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}x]=\underline{\frac{1}{1-x^2}}$

一格僅一分

以下爲草稿區, 答案寫於此處不記分

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、四處張望 ..... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 以零分計算。