Power Series - Example of Generating Function

以 *Fibonacci Sequence* (費氏數列、兎子數列) 的遞迴式爲例

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

我們先不管起始的 f_1, f_2 是多少。用你們學過的一點線性代數來看,

$$\begin{Bmatrix} f_{n+1} & = f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} & = f_{n+2} \end{Bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{bmatrix}$$

令 $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $u_n := \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}$, 上式即爲 $A\,u_n = u_{n+1}$ 。

A 的 characteristic polynomial 爲 $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1$, $\therefore A$ 的 eigenvalue 爲 $\begin{matrix} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R} \end{matrix}$

$$A\,v_i = \lambda_i v_i \iff (A - \lambda_i I)v_i = 0 \iff \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 \\ 1 & 1-\lambda_i \end{bmatrix} v_i = 0 \iff v_i \parallel \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}$$

$\therefore \lambda_i$ 對應的 eigenvector $\parallel \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}$ 且 $\mathrm{span}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2$, 所以任何向量皆可寫成 v_1, v_2 的線性組合。令 $u_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2$, 則 $u_2 = A\,u_1 = c_1 A v_1 + c_2 A v_2 = c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2$, $\ldots$, $A^n u_1 = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2$, 也就是說, 知道 u_1 寫成 v_1, v_2 線性組合係數, 就知道任意 u_n 了:

$$u_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2 \iff \begin{matrix} f_1 & = & c_1 & + & c_2 \\ f_2 & = & c_1\lambda_1 & + & c_2\lambda_2 \end{matrix} \iff \begin{matrix} c_1 & = \frac{f_2 - f_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ c_2 & = \frac{f_1\lambda_1 - f_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{matrix}$$

所以 $u_n = c_1 \lambda_1^{n-1} v_1 + c_2 \lambda_2^{n-1} v_2$, 第一個分量 $f_n = \left(\frac{f_2 - f_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\lambda_1^{n-1} + \left(\frac{f_1\lambda_1 - f_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\lambda_2^{n-1}$

記得,『隱式 換成 顯式』, 或者『顯式 換成 隱式』, 有時是相當困難的。

§9.1 #52 : 若 $f_1 := 1$, $f_2 := 1$, 則 $f_n = (\frac{1-\lambda_2}{\sqrt{5}})\lambda_1^{n-1} - (\frac{1-\lambda_1}{\sqrt{5}})\lambda_1^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$

§9.6 #36 : 若 $F = f_0x^0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + f_5x^5 + f_6x^6 + \cdots$, 則 F 稱爲 數列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的 *generating function* 。如果你只有 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的遞迴式 $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, 在不知道如何得出 f_n 顯式的情況下, 要如何求 F 的收斂域呢? 在我們講過的許多例子裡, 求 展開式封閉型式 的中間過程 就巧妙地把收斂域帶出來了。很自然的, 剛剛的問題會聯想到: 這個 F 展開式的封閉型式究竟是什麼?(希望求這個過程也能順便帶出收斂域)

$$\begin{array}{rrclllllll} & F & = & f_0x^0 & +f_1x^1 & +f_2x^2 & +f_3x^3 & +f_4x^4 & +\cdots \\ +) & xF & = & & f_0x^1 & +f_1x^2 & +f_2x^3 & +f_3x^4 & +\cdots \\ \hline & F + xF & = & f_0x^0 & +f_2x^1 & +f_3x^2 & +f_4x^3 & +f_5x^4 & +\cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{lcr} (F + xF - f_0x^0)x & = & f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + f_5x^5 + \cdots \\ (F + xF - f_0x^0)x + f_0x^0 + f_1x^1 & = & f_0x^0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + f_5x^5 + \cdots \end{array}$$

即 $xF + x^2F + f_0 + (f_1 - f_0)x = F$, 即 $F = \frac{f_0 + (f_1 - f_0)x}{1 - x - x^2}$。

§9.7 #33 : 給定起始的 $f_0 := 0, f_1 := 1$, 則 $F = \frac{x}{1-x-x^2}$, 然後, 收斂域在哪兒呢?

求出收斂域後, 你有什麼心得?

mwu@mail.tku.edu.tw

Difference Equation v.s. Differential Equation (差分方程 與 微分方程)

還是以費氏數列 $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ 爲例。令 $\Delta f_n := f_{n+1} - f_n$,

$$\begin{array}{rccccc} & f_{n+2} & = & f_{n+1} & + & f_n \\ -) & f_{n+1} & = & f_n & + & f_{n-1} \\ \hline & \Delta f_{n+1} & = & \Delta f_n & + & \Delta f_{n-1} \end{array}$$

這就是費氏數列的差分方程。一樣可以寫成

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta f_n \\ \Delta f_{n+1} \end{bmatrix}}_{\text{令爲 } \Delta u_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta f_{n+1} \\ \Delta f_{n+2} \end{bmatrix}}_{\Delta u_{n+1}}$$

做法跟上面也相同。再看另一個微分方程: $y'' - y' - y = 0 \quad \left([*]' = \frac{d}{dx}[*] \right)$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} & & y' & = & y' \\ y & + & y' & = & y'' \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}}_{\text{令爲 } u} = \underbrace{\begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix}}_{u'}$$

還是一樣的 A, 一樣的 characteristic polynomial: $\lambda^2 - \lambda - 1$ 並求其根 (A 的 eigenvalues)。這不是湊巧。

希望這對於你在微積分、線性代數、甚至工程數學『微分方程』的部分可以起串聯、引導、啓發的作用。

 mwu@mail.tku.edu.tw