

Binomial Expansion

$p \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, 求 $f(x) = (1+x)^p$ 對 0 展開之冪級數的收斂域 $\mathcal{C}_f$ 。

$$\text{已知形式上, } f(x) = \binom{p}{0}x^0 + \binom{p}{1}x^1 + \binom{p}{2}x^2 + \cdots$$

令 $a_n = \binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}$, 並先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < 1$ 以求部分收斂域, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p-n}{n+1} \right| \cdot |x| = |x| < 1$, 所以知道 $(-1, 1) \subset \mathcal{C}_f$ 。現在檢驗 -1 與 1 在不在收斂域:

只要 p 不是正整數, 則在項數 n 大於 $p+1$ 時 ($n \geq m := [p] + 1$), a_n 開始正負號交錯:

$$(n \geq m), a_n = \frac{\overset{+}{p} \overset{+}{(p-1)} \cdots \overset{+}{(p-m+2)}}{m!} \cdot \frac{\overset{-}{(p-m+1)} \overset{-}{(p-m)} \cdots \overset{-}{(p-n+1)}}{(m+1) \cdots n},$$

所以, 將 $x = 1$ 代入冪級數, 自第 m 項起為一交錯級數

$$\begin{aligned} p < -1 & : |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty; \\ p = -1 & : |a_n| = 1; \\ p > -1 & : |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \text{ 也就是說, 只有在 } p > -1 \text{ 時 } 1 \in \mathcal{C}_f.$$

將 $x = -1$ 代入冪級數, 自第 m 項起開始同號, 即問 $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ 斂散性。由上面得知, 只有在 $p > -1$ 時 $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ 才有可能收斂。

舉個例子。將冪級數 $1 - \frac{1}{2} \binom{1}{1} x^2 - \frac{1}{2^2} \binom{1-1}{1-2} x^4 - \frac{1}{2^3} \binom{1-1-1}{1-2-3} x^6 - \frac{1}{2^4} \binom{1-1-3}{1-2-3-4} x^8 - \frac{1}{2^5} \binom{1-1-3-5}{1-2-3-4-5} x^{10} + \cdots$ 記為 $g(x)$, 求 g 的封閉型式及其收斂域 $\mathcal{C}_g$ 。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 1 - \frac{1}{2} \binom{1}{1} x^2 - \frac{1}{2^2} \binom{1-1}{1-2} (x^2)^2 - \frac{1}{2^3} \binom{1-1-1}{1-2-3} (x^2)^3 - \frac{1}{2^4} \binom{1-1-3}{1-2-3-4} (x^2)^4 - \frac{1}{2^5} \binom{1-1-3-5}{1-2-3-4-5} (x^2)^5 + \cdots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} \right) x^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) (x^2)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) (x^2)^3 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) (x^2)^4 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) (x^2)^5 + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} \right) (-x^2) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \right) (-x^2)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \right) (-x^2)^3 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2} \right) (-x^2)^4 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2} \cdot \frac{-7}{2} \right) (-x^2)^5 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} (-x^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (-x^2)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) (-x^2)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) (-x^2)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) \left(\frac{1}{2} - 4 \right) (-x^2)^5 + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) (-x^2)^0 + \left(\frac{1}{2} \right) (-x^2)^1 + \left(\frac{1}{2} \right) (-x^2)^2 + \cdots, \\ &\text{若 } |-x^2| < 1, \text{ 即 } |x| < 1, \text{ 則此冪級數為 } (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ 二項展開。} \end{aligned}$$

$x = \pm 1$ 時是同樣的級數, 故考慮 $a_1 := 1, a_n := \frac{1}{2^n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$, 正級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的斂散性即可:

雖然 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n-1}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$, 即 R、T 判別無效 (注意 R、T 對 p -級數也是無效!), 觀察一下:

$$a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n-2)(2n)} = \frac{n(2n-2)!}{2^{2n-2}(n!)^2}$$

$\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{5}{128}, \frac{7}{256}, \frac{21}{1024}, \frac{33}{2048}, \cdots \right\}$ 從這兒又想到去觀察項數變兩倍後的比值,

$$= \left\{ \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^5}, \cdots \right\}$$

竟然又有 $\frac{a_{2n}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2^{1.5}}$, 到此, 應該覺得會收斂才是。

聲稱: $a_n < \frac{1}{n^{1.5}}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \approx \left\{ \frac{1}{2.00}, \frac{1}{8.00}, \frac{1}{16.00}, \frac{1}{25.6}, \frac{1}{36.57}, \frac{1}{48.76}, \frac{1}{62.06}, \frac{1}{76.38}, \cdots \right\}$

$$\left\{ \frac{1}{n^{1.5}} \right\}_{n=1}^{\infty} \approx \left\{ \frac{1}{1.00}, \frac{1}{2.82}, \frac{1}{5.19}, \frac{1}{8.00}, \frac{1}{11.18}, \frac{1}{14.69}, \frac{1}{18.52}, \frac{1}{22.62}, \cdots \right\}$$

L: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{1.5}}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} < 1$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。即 $(-1, 1) \subset \mathcal{C}_g, \pm 1 \in \mathcal{C}_g, \mathcal{C}_g = [-1, 1]$ 。