Power series of $f(x)$ in $(x-a)$

將 $f(x)$ 寫成 power series in $(x-a)$, 即: 將 $f(x)$ 寫成 $*+*(x-a)+*(x-a)^2+*(x-a)^3+\cdots$, 即: 求 $f(x)$ 對 a 的 Taylor 展開式. $f(x)$ 稱爲 該冪級數之封閉形式 (closed form) 或稱 生成函數 (generating function)。$a=0$ 時的展開式 $*+*x+*x^2+*x^3+\cdots$ 又稱爲 Maclaurin 展開式.

由於 $f(x)$ 本身的定義域 D_f 與 其 power series 的收斂域 $\mathcal{D}_{\text{conv}}$ 不一定相同 ($\mathcal{D}_{\text{conv}}\subseteq D_f$) 所以我們才會一直說: 在未求得收斂域之前, 形式上,$f(x)=*+*(x-a)+*(x-a)^2+*(x-a)^3+\cdots$。

課堂上講過好幾次了: 了解 power series 的主要目的, 是爲了 以有系統的方法, 求出收斂級數的值. 因爲通常 求無窮級數收斂值 的問題, 直接算很難得到精確解, 都得透過觀察, 找到相關 power series 的 closed form, 再代值進去。只是必須注意, 所代的值必須落在 power series 的收斂域內。

如何求收斂域(收斂區間)

令 $*+*(x-a)+*(x-a)^2+*(x-a)^3+\cdots$ 的收斂域爲 $\mathcal{D}_{\text{conv}}$, 很明顯地, $\mathcal{D}_{\text{conv}}$ 一定包含 a. 如果$\mathcal{D}_{\text{conv}}$不只一點, 按常理推斷, 對於很靠近 a 的 x 而言, 該冪級數可能也會收斂。於是我們想知道: 由 a 向左右擴張到什麼程度, 使得該冪級數依然收斂.

將 $*+*(x-a)+*(x-a)^2+*(x-a)^3+\cdots$ 記做 $\sum_n a_n(x)$, 因爲 $a_n(x)$ 的 $+/-$ 與 x 有關 (不一定是正級數或交錯級數), 所以我們乾脆就先假設 $\sum_n a_n(x)$ conv. abs. 以求得 $\mathcal{D}_{\text{conv}}$: 如果用 *ratio test* 來看正級數收斂這件事, 就分成兩種情況:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|<1$, 確定收斂, 滿足此不等式之 x 所成的集合 S 包含於 $\mathcal{D}_{\text{conv}}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=1$, 不確定收斂, 需要再另外檢驗 S 的邊界點。

Example 1 形式上, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_n \overbrace{\frac{x^n}{n}(-1)^{n+1}}^{a_n(x)}$

- 令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|<1,\iff \lim\limits_{n\to\infty}|x|\frac{n}{n+1}<1,\iff |x|<1,$

  檢驗 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=1$, 即 $|x|=1$ 的情況: $\begin{cases} x=-1: -\sum_n\frac{1}{n}(\text{負的調和級數}):\ \text{div.}\\ x=+1: \sum_n\frac{(-1)^n}{n}(\text{交錯級數}):\ \text{conv.}\end{cases}$,

  所以 $\mathcal{D}_{\text{conv}}=\{x\,|-1<x\le 1\}=(-1,1]$.

- $$\begin{array}{llll}\ln(1+x) & \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow}\ \frac{1}{1+x} & = & 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots \quad \text{if } |-x|<1\\ & \overset{\int dx}{\Longrightarrow}\ \ln(1+x) & =C+ & x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots \quad \text{if } |x|<1\\ \text{代入 } x=0: & \qquad 0 & =C. & \end{array}$$

  檢驗 $|x|<1$ 的邊界, 即 $|x|=1$ 的情況: (同上),

  所以 $\mathcal{D}_{\text{conv}}=\{x\,|-1<x\le 1\}=(-1,1]$.

Example 2 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的收斂域 $\mathcal{D}_{\text{conv}}$ 及其封閉形式.

- 假設 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)x^{n+1}}{n(n+1)x^n}\right| < 1,\iff \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x}{n}\right| < 1,$
$\iff \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n}\right||x| < 1,\iff |x| < 1.$

檢驗 $|x| = 1$: $\begin{array}{l} x = 1: \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \text{ 發散} \\ x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-1)^n \text{ 發散} \end{array}$ 所以 $\mathcal{D}_{\text{conv}} = (-1, 1)$.
用審斂法僅能求出 $\mathcal{D}_{\text{conv}}$, 無法求出 closed form。

- 令 $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$. 則

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1} \\
\overset{\int\int}{\Longrightarrow}\quad \int\int \frac{f(x)}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} + C_1x + C_2 \\
&= \frac{x^2}{1-x} + C_1x + C_2 \quad \text{as } |x| < 1 \\
&= -x - 1 + \frac{1}{1-x} + C_1x + C_2 \\
&= \frac{1}{1-x} + C_3x + C_4
\end{aligned}$$

$\overset{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{(1-x)^3} \Longrightarrow f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$ as $|x| < 1$
檢驗 $|x| = 1$: 皆發散所以 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$, $\mathcal{D}_{\text{conv}} = (-1, 1)$.

這樣做不僅求出 $\mathcal{D}_{\text{conv}}$, 還能求出 closed form。

Example 3 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)3^k}$ 的收斂域 $\mathcal{D}_{\text{conv}}$ 及其封閉形式.

- 假設 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}}{\frac{x^n}{(n+1)3^n}}\right| < 1,\iff \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)|x| < 1,\iff |x| < 3.$

檢驗 $|x| = 3: \left\{\begin{array}{l} x = -3: \text{conv.} \\ x = +3: \text{div.}\end{array}\right.$, 所以收斂域 $\mathcal{D}_{\text{conv}} = [-3, 3)$。

- $\sum\frac{(\frac{x}{3})^k}{k+1}$, 觀察出 $\sum\frac{x^k}{k+1}$ 與 有關:

$$\begin{aligned}
\text{令 } f(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} \\
xf(x) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\
\frac{d}{dx}[xf(x)] &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ as } |x| < 1 \\
xf(x) &= \textstyle\int\frac{dx}{1-x} + C, \Rightarrow C = 0 \\
f(x) &= \frac{\ln(1-x)}{-x}
\end{aligned}$$

因為 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim_{x\to 0}\ln\left[(1-x)^{\frac{1}{-x}}\right] = \ln e = 1,$
所以我們可以定義

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{\ln(1-x)}{-x}, & -1 \le x < 1,\ x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)3^n} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{-3}{x}\ln(1-\frac{x}{3}), & -3 \le x < 3,\ x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{array}\right.$$

Example 4 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$, 求其收斂值。

$$
\begin{aligned}
e^x &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \,, \forall x \in \mathbb{R} \\
\xRightarrow{\frac{d}{dx}\cdot} e^x &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!}, \\
x e^x &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n}}{n!}, \\
\xRightarrow{\frac{d}{dx}\cdot} [xe^x]' = xe^x + e^x &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^{n-1}, \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \Big[x e^x + e^x \Big]_{x=1} = 2\,e.
\end{aligned}
$$

類似的, 如本題 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$, $k = 2,\ 3,\ 4,\ 5, \cdots$ 及其他求 無窮級數值 的問題, 請回家練習。期中考時將不給提示。

Example 5 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\tfrac{2}{3})^n$ 收斂, 求其收斂值。:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ |x| < 1; \\
\xRightarrow{\frac{d}{dx}} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\
\xRightarrow{x\cdot} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\
\xRightarrow{\frac{d}{dx}} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} \\
\xRightarrow{x\cdot} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n} = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

再把 $x = \frac{2}{3}$ 代進去 就好了 (可以代, 因爲 $|\frac{2}{3}| < 1$)。