Continuity

如同單變量函數, 一般的極限定義:

Definition 1 [Limit] Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a function. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ exists, say, equal to $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, provided that $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta(\varepsilon) > 0$ such that $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$。

Definition 2 [Continuity] Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a function. f is *continuous* at $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ if $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, i.e. $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta(\varepsilon) > 0$ such that $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$。

極限定義說, 如果極限存在, 無論 $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ 採取何種路徑, 極限值皆不變。由於 $n \geq 2$ 時, 極限定義中 $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ 的路徑 不可數, 所以, 特定路徑 只能用來說明極限不存在的情況。

以 $n = 2, m = 1$, 即 $f(x, y) \in \mathbb{R}$ 爲例。在不失 般性的情況下, 令 $\mathbf{a}$ 即原點 $\mathbf{0}$, 且爲 $f(x, y)$ 的奇點 (singular point)。令接近 $\mathbf{0}$ 的某路徑爲 $y = g(x)$。[如果] g 有對 0 的 Taylor 展開式

$$g(x) = *x^* + *x^* + *x^* + \cdots = mx^k + \{\text{ 高次項 }\}, \tag{1}$$

則, 當 $x \approx 0$ 時, $f(x, g(x)) \approx f(x, mx^k)$。注意 [如果]二字, 因爲: 並非所有路徑都是光滑的。

如果 對於任何的 m, k, $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx^k)$ 皆不變, 我們就有充分的理由懷疑 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ 是存在的。

有時候, 改變座標系統 可以比較容易看出極限存在與否。

例如: $f(x, y)$ is singular at (a, b), $\overset{\text{平移}}{\Longleftrightarrow}$ $g(x, y) \overset{\text{def}}{=} f(x + a, y + b)$ is singular at $(0, 0)$,
再換成極座標:$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 解決 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \lim\limits_{r\to 0} g(r, \theta)$ 的問題。

實在不行, 就只好用 ε-δ 定義來證明極限存在與否。

Example 1 $f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, 若取趨近 $(0, 0)$ 的路徑爲 $y = mx^k$, 則 $f(x, mx^k) = \dfrac{mx^{k+3} - m^3x^{3k+1}}{x^2 + m^2x^{2k}}$.

$$\text{若 } k \geq 1,\ \lim_{x\to 0} f(x, mx^k) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^{k+1} - m^3x^{3k-1}}{1 + m^2x^{2k-2}} = \frac{0+0}{1+0} \text{ 或 } \frac{0+0}{1+m^2} = 0;$$
$$\text{若 } k < 1,\ \lim_{x\to 0} f(x, mx^k) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^{3-k} - m^3x^{k+1}}{x^{2-2k} + m^2} = \frac{0+0}{0+m^2} = 0;$$

即: 對於任何的 m, k, $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx^k) = 0$, 故合理懷疑 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ 等於 0;

另外, $f(x, y)$ 爲 $\frac{4\text{ 階}}{2\text{ 階}}$, 大致也可以 "看出" $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ 等於 0;

這題變換成極座標後, 幸運地, 變得很容易: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^4 \overbrace{(\frac{1}{2}\cos 2\theta \sin 2\theta)}^{\text{有界}}}{r^2} = 0$

Differentiablity

單變量函數的可微性: $f(x)$ 可微 $\iff$ $f'(x)$ 存在 $\Longrightarrow f, f'$ 在 a 處連續。

$f(x,y)\in\mathbb{R}$. 如同單變量函數的可微性, 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 、$\frac{\partial f}{\partial y}$ 皆存在, 則稱 f 可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 、$\frac{\partial f}{\partial y}$ 必然連續, 但未必可微。

如果 $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ 、$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ 連續, 則 $f_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ 等於 $f_{yx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$。

如果所有二階導數 f_{xx} 、f_{xy} 、f_{yx} 、f_{yy} 皆連續, 則 $f_{xy}=f_{yx}$, 且稱 f 爲二次可微。

無論 f 是幾個變量, 若所有 f 的 k 階導數 都連續, 則任一 f 的 k 階導數與求導順序無關, 且稱 f 爲 k 次可微。

Example 2 這是 $f_{xy}\neq f_{yx}$ 的例子: $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 則 $f(x,y)$ 處處連續, 並且

$$\begin{cases} f_x(0,y)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}=\cdots=-y, \\ f_y(x,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x,0+h)-f(x,0)}{h}=\cdots=x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{xy}(0,y)=\frac{\partial}{\partial y}(-y)=-1, \\ f_{xy}(x,0)=\frac{\partial}{\partial x}(x) \ = \ 1, \end{cases} \quad \begin{cases} f_{yx}(0,0)=-1, \\ f_{yx}(0,0)= \ 1. \end{cases}$$

雖然 f_x, f_y 在 $(0,0)$ 連續,

$$f_x=\frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{5\text{ 階}}{4\text{ 階}},$$

$$f_y=\frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{5\text{ 階}}{4\text{ 階}},$$

但是 f_{xy}, f_{yx} 在 $(0,0)$ 並不連續:

$$f_{yx}=\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{6\text{ 階}}{6\text{ 階}},$$

$$f_{xy}=\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{6\text{ 階}}{6\text{ 階}},$$

從分子、分母的階數 大致可看出在 $(0,0)$ 處的連續性。