Lagrange 方法求区域性极值

我们知道，$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的增/减最快的方向一定是铅直方向，也就是说，在 f 的 local extrema 发生处，如果行进方向(切方向)具有铅直分量的话，(fig.1) 则 f 还可以增加/减少，那就不叫 local extrema 了。所以说，f 的 local extrema 发生处，行进路线(切方向)一定不具有铅直分量(fig 2)，

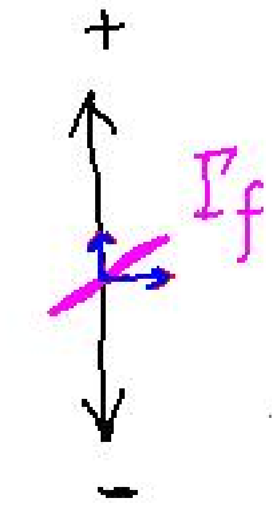


fig. 1

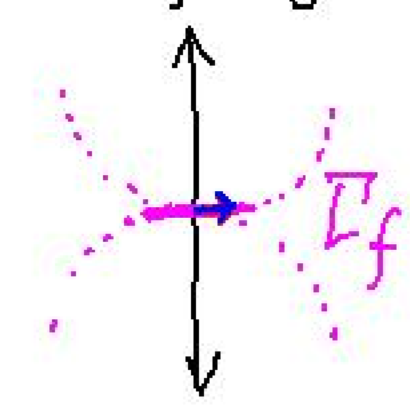


fig. 2

我们知道 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 增/减最快的方向是 ∇f，如果 f 的自变量 x, y 受制于 $g(x,y)=0$，则在 f 的 local extrema 发生处，路径 $g(x,y)=0$ 必须和 ∇f 垂直，即 $\nabla g \parallel \nabla f$ (fig.3)，即 $\nabla f, \nabla g$ 线性相关。

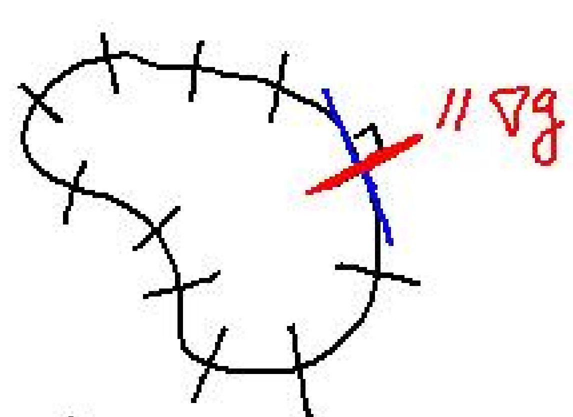
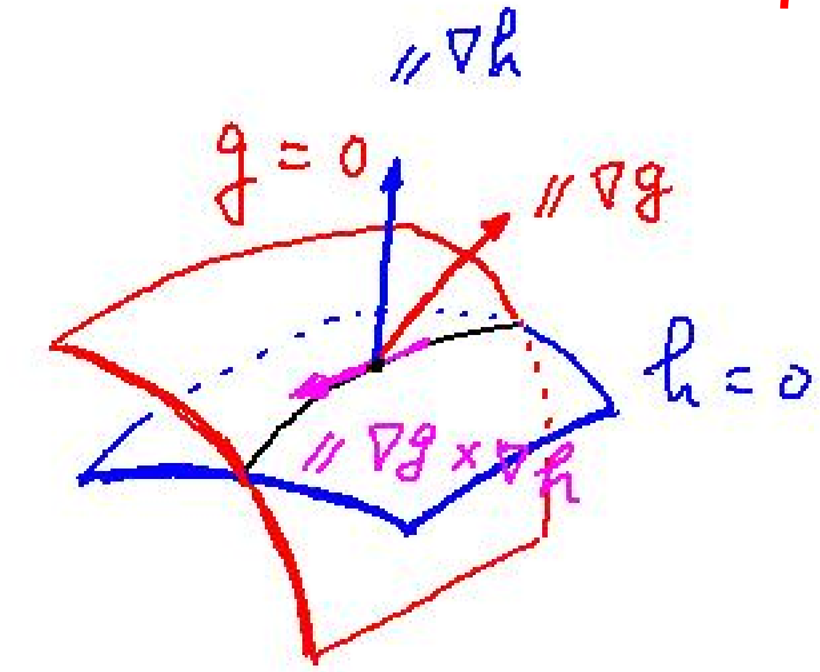


fig. 3

$$g = 0 \Rightarrow \underbrace{dg}_{=\nabla g \bullet (dx, dy)} = 0$$

$\nabla g \bullet (dx, dy)$ (// 切方向)



同样的理由，$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 增/减最快的方向为 ∇f，如果 f 的自变量 x, y, z 受制于 $\begin{cases} g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$，则行进方向 $(\parallel \nabla g \times \nabla h)$ (切方向) 必须与 ∇f 垂直，

即 $\nabla f \bullet (\nabla g \times \nabla h) = 0$，即 $\det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = 0$，即 $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ 线性相关。

若 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，变量 x,y,z 仅受制于 $g(x,y,z)=0$，$\left(\Leftrightarrow \overset{\nabla g\cdot(dx,dy,dz)}{\overset{\|}{dg}}=0\right)$

依然是：在 f 的 local extrema 发生处，行進路线必须与 ∇f 垂直。

不过在 $g=0$ 上，任一点的任一行径皆与 ∇g 垂直(fig. 4)，所以

结论还是一样：∇g 必须平行于 ∇f，即 ∇f, ∇g 线性相关。

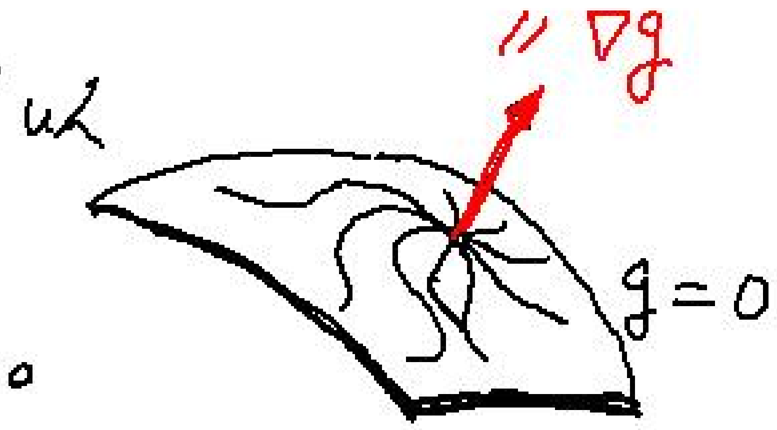


fig. 4

∇f、∇g，∇h 假設皆是非0向量。

- ∇f、∇g 线性相关，即：存在 $\lambda\neq 0$ 使得 $\nabla f=\lambda\nabla g$；
- ∇f, ∇g, ∇h 线性相关，即：存在 $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$，使得 $\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h$。

称 ∇f 为 ∇g 与 ∇h 的线性組合，对应的线性組合係数 (λ,μ)，在這裡叫做 Lagrange multipliers.

注意 "线性相关"這件事，不一定需要引進 Lagrange multiplier 来描述，有時反而更麻烦.

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，或 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\cdots \Leftrightarrow ad=bc \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{vmatrix}=0$，$\Leftrightarrow \cdots$