微積分 II 之 偏導數　學號＿＿＿＿＿＿　座號＿＿　姓名 ***Grading Key***　　分數 **60**

1. **(5)** 說明極限值 存在 或 不存在 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$

令 $x-1=cy$ (+2), 原式 $=\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{cy^2}{(c^2+1)y^2}=\frac{c}{c^2+1}$ (+1) 與 c 有關 (+1), 故極限值不存在 (+1)。

---

2. **(8)** $xyz=\cos(x+y+z)$, 以 differential 的方式得 $\frac{\partial x}{\partial y},\frac{\partial y}{\partial z},\frac{\partial x}{\partial z}$, 套公式不給分。

原式 $\overset{d}{\Longrightarrow} dx\cdot yz+x\cdot dy\cdot z+xy\cdot dz=-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)$ (左 +1, 右 +1),

$\Leftrightarrow (yz+\sin(x+y+z))\,dx+(xz+\sin(x+y+z))\,dy+(xy+\sin(x+y+z))\,dz=0$, (1+1+1)

$\therefore \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{xz+\sin(x+y+z)}{yz+\sin(x+y+z)},\ \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{xy+\sin(x+y+z)}{xz+\sin(x+y+z)},\ \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{xy+\sin(x+y+z)}{yz+\sin(x+y+z)}$ (1+1+1)。

---

3. **(5)** $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。以 f 的 linearization 估計 $f(3.02,1.97,5.99)$ 。

$f(x,y,z)\approx f(3,2,6)+\nabla f(3,2,6)\bullet(x-3,y-2,z-6)$ (+1) $=7+\frac{1}{7}(3,2,6)\bullet(x-3,y-2,z-6)$ (+2),

$\therefore f(3.02,1.97,5.99)\approx 7+\frac{1}{7}(3,2,6)\bullet(0.02,-0.03,-0.01)$ (+1) $=7-\frac{0.06}{7}=6.99\overline{142857}$ (+1)

---

4. **(9)** $f(x,y,z)=5x^2-3xy+xyz$, p 點爲 $(3,4,5)$。求:

(a) 在 p 點以 $v=(1,1,-1)$ 方向前進 f 的 微變化率

$\nabla f=(10x-3y+yz,-3x+xz,xy)$ (1+1+1), $\nabla f(3,4,5)=(38,6,12)$ (+1) ,

$D_vf(3,4,5)=\nabla f(3,4,5)\bullet\frac{v}{\|v\|}$ (+1) $=(38+6-12)/\sqrt{3}=32/\sqrt{3}$ (+1)

(b) 在 p 點以哪個方向前進, f 的微變化率會最大? $(38,6,12)$ (+1)

(c) 在 p 點 f 最大的微變化率是多少? $\|(38,6,12)\|=2\sqrt{406}$ (+2)

背面還有。以下爲草稿區, 答案寫於此處不記分

1 原式 $=\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ (+1) $=\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}$ (+1) $=\cos\theta\sin\theta$ (+1) 與趨近 $(1,0)$ 的角度有關 (+1), 故極限值不存在 (+1)。

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 以零分計算。

5. **(15)** $f(x,y)=y^3+3x^2y-6x^2-6y^2+2$, 依步驟求 f 的極值:

(a) 找出 f 的所有 critical points

令 $\begin{cases} f_x=6xy-12x \text{ (+1)} &= 6x(y-2) \text{ (+1)} &=0 \\ f_y=3y^2+3x^2-12y \text{ (+1)} &= 3(x^2+(y-2)^2-4) \text{ (+1)} &=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0),(0,4),(2,2),(-2,2)$ (1+1+1+1)。

(b) 對 critical points 進行判別

$f_{xx}=6y-12,\ f_{xy}=6x=f_{yx},\ f_{yy}=6y-12$ (1+1+1), $\therefore$ 判別式 $D(x,y):=36\Big((y-2)^2-x^2\Big)$ (+1):

$D(0,0)>0\ f_{xx}(0,0)<0\ \therefore f(0,0)=2$ — local max. (+1)

$D(0,4)>0\ f_{xx}(0,4)>0\ \therefore f(0,4)=-10$ — local min. (+1)

$D(2,2)<0\ D(-2,2)<0\ \therefore (2,2)$ 與 $(-2,2)$ 皆爲鞍點 (+1)

---

6. **(7)** 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 上的區域性極值。

令 $g(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$。f 在 $g=0$ 上極值發生處 必有 $\nabla f \parallel \nabla g$, 即 $xyz(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}) \parallel 2(x,2y,3z)$ (1+1)

$\Leftrightarrow x^2=2y^2=3z^2=2$ (+2), $\therefore |x|、|y|、|z|=\sqrt{2}、1、\sqrt{\frac{2}{3}}$, (x,y,z) 共六組 (+1):

$f(\sqrt{2},1,\sqrt{\frac{2}{3}})=f(+,-,-)=f(-,+,-)=f(-,-,+)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ — local max. (+1)

$f(-\sqrt{2},-1,-\sqrt{\frac{2}{3}})=f(-,+,+)=f(+,-,+)=f(+,+,-)=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ — local min. (+1)

---

7. **(11)** C 爲 $x+y+2z=2$ 與 $z=x^2+y^2$ 的交集。求: C 上離原點最近和最遠的點。

令 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z)=x+y+2z-2$, $h(x,y,z)=x^2+y^2-z$, f 在 $g=0\cap h=0$ 極值發生處 必有 $\det(\nabla f,\nabla g,\nabla h)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2x & 2y & -1 \end{vmatrix}=0$ (1+1+1) $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2x & 2y & -1 \end{vmatrix}=0$ (+1), 對第一列展開

$\Leftrightarrow (2z+1)(2y-2x)=0$ (+2) $\Leftrightarrow x=y$ 或 ~~$z=-\frac{1}{2}$~~ (+1) (必須同時滿足 $g=0$ 與 $h=0$)

$\therefore (x,y,z)=(-1,-1,2),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (1+1), $\sqrt{f(-1,-1,2)}=\sqrt{6}$ (最遠距離) (+1), $\sqrt{f(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{3}{4}}$ (最近距離) (+1)。

以下爲草稿區, 答案寫於此處不記分