微積分 II 之 向量微積分 學號__________ 座號___ 姓名 ***Grading Key*** 分數 **50**

1. $\mathbf{r}=(x,y,z)$, $r=\|\mathbf{r}\|$ 。純量函數 $\Phi(\mathbf{r}):=1/r$

$\nabla\bullet\nabla\Phi=?$

(6) $\frac{\partial}{\partial x}\Phi=\frac{-1}{r^2}\frac{1}{2}\frac{2x}{r}=\frac{-x}{r^3}$ (+1) , $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi=\frac{-1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{x}{r}$ (+1) $=\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$ (+1) ,

$\nabla\bullet\nabla\Phi(=\nabla^2\Phi)=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})\Phi$ (+1) $=\frac{3r^2}{r^5}-\frac{3}{r^3}$ (+1) $=0$ (+1) ($\Phi(x,y,z)$ 是爲調和函數)

$\nabla\times\nabla\Phi=?$

(6) $\nabla\times\nabla\Phi=(\Phi_{zy}-\Phi_{yz},\Phi_{xz}-\Phi_{zx},\Phi_{yx}-\Phi_{xy})$ (+1) ,

$\Phi_{zy}=\Phi_{yz}=\frac{3yz}{r^5}$ (+1), $\Phi_{xz}=\Phi_{zx}=\frac{3xz}{r^5}$ (+1), $\Phi_{yx}=\Phi_{xy}=\frac{3xy}{r^5}$ (+1)

所有二階偏導在原點的極限值皆不存在 (+1), 故 原點以外 才有 $\nabla\times\nabla\Phi=\vec{0}$ (+1)。

---

2. $\mathbf{f}=(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2})$, $\mathscr{C}$: 任何逆時針繞原點的簡單封閉路徑。求 $\oint_{\mathscr{C}}\mathbf{f}\bullet d\mathbf{r}$ (Green 定理)

(13) 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}f_2=\frac{-2x}{r^4}$ (+1) $+(y^2-x^2)(-4)r^{-5}\frac{x}{r}$ (+1) $=\frac{-2x(x^2+y^2)-4x(y^2-x^2)}{r^6}$ (+1) $=\frac{2x^3-6xy^2}{r^6}$ (+1)

$\frac{\partial}{\partial y}f_1=\frac{2x}{r^4}$ (+1) $+(2xy)(-4)r^{-5}\frac{y}{r}$ (+1) $=\frac{2x(x^2+y^2)-8xy^2}{r^6}$ (+1) $=\frac{2x^3-6xy^2}{r^6}$ (+1)

除了原點以外, $\mathbf{f}$ 的旋度 $\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}$ 皆爲零 (+1), 只要 $\mathscr{C}$ 繞圓點, 線積分 $\oint_{\mathscr{C}}\mathbf{f}\bullet d\mathbf{r}$ 的值都相同 (+1)。令 C : 以原點爲圓心、半徑爲 1、逆時針繞原點的圓。$\oint_{\mathscr{C}}\mathbf{f}\bullet d\mathbf{r}=\oint_C\mathbf{f}\bullet d\mathbf{r}=\oint_C(f_1\,dx+f_2\,dy)$

$=\int_0^{2\pi}\big(2\cos\theta\sin\theta(-\sin\theta)+(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\cos\theta\big)\,d\theta$ (+1) $=\int_0^{2\pi}\cos\theta(-\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,d\theta=-\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$ (+1) $=0$ (+1)

背面還有。以下爲草稿區, 答案寫於此處不記分

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 以零分計算。

3. $\mathbf{f}=(x+y^2,y+z^2,z+x^2)$, C 是以 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 頂點的三角形路徑。求 $\oint_C \mathbf{f}\bullet d\mathbf{r}$ (Stoke 定理)

(8) $\nabla\times\mathbf{f}=((z+x^2)_y-(y+z^2)_z,\ (x+y^2)_z-(z+x^2)_x,\ (y+z^2)_x-(x+y^2)_y)=(-2z,-2x,-2y)$ (1+1+1), 令 S 爲 C 所圍的三角形平面區域 (在 $x+y+z=1$ 上), $\oint_C \mathbf{f}\bullet d\mathbf{r}=\int_S -2(z,x,y)\bullet\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\,dS$ (+1) $=\frac{-2}{\sqrt{3}}\int_S \underbrace{(x+y+z)}_{1}\,dS$ (+1) $=\frac{-2}{\sqrt{3}}\cdot$三角形面積 $=\frac{-2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (+2) $=-1$ (+1)

---

4. $S: x^2+y^2+z^2=1$。運用 Divergence 定理 求 $\oint_S (2x+2y+z^2)\,dS$

(7) (x,y,z) 在單位球上, 法向量即爲 (x,y,z) (+1), 於是可將 $\oint_S (2x+2y+z^2)\,dS$ 視爲 $\oint_S \underbrace{(2,2,z)}_{\text{向量場 (+1)}}\bullet\underbrace{(x,y,z)\,dS}_{\text{有向微面積 (+1)}}$ $=\int_V (\frac{\partial}{\partial x}2+\frac{\partial}{\partial y}2+\frac{\partial}{\partial z}z)\,dV$ (+2) $(V: x^2+y^2+z^2\le 1)=\int_V 1\,dV$ (+1) $=\frac{4}{3}\pi$ (+1)

---

5. $\mathbf{r}=(x,y,z)$, $r=\|\mathbf{r}\|$, 電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{\varepsilon Q}{r^3}\mathbf{r}$, S: 任何包圍原點的封閉曲面。求 $\oint_S \mathbf{E}\bullet\mathbf{n}\,dS$ (Divergence 定理)

(10) $\left(\frac{\varepsilon Qx}{r^3}\right)_x=\varepsilon Q(\frac{1}{r^3}-3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r})$ (+1) $=\varepsilon Q(\frac{1}{r^3}-3\cdot\frac{x^2}{r^5})$ (+1), $\Rightarrow \nabla\bullet\mathbf{E}=\varepsilon Q(3\cdot\frac{1}{r^3}-3\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5})$ (+1) $=0\ \forall\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$ (+1) 令 V 爲 S 與小球面 $S_\delta: r=\delta$ 之間的區域。因爲 V 不含原點, $\int_V \nabla\bullet\mathbf{E}\,dV=\oint_S \mathbf{E}\bullet\mathbf{n}\,dS-\oint_{S_\delta}\mathbf{E}\bullet\mathbf{n}\,dS$ (+1) $=0$ (+1), 即: $\oint_S \mathbf{E}\bullet\mathbf{n}\,dS=\oint_{S_\delta}\mathbf{E}\bullet\mathbf{n}\,dS=\varepsilon Q\oint_{S_\delta}\frac{1}{r^3}\mathbf{r}\bullet\frac{\mathbf{r}}{r}\,dS$ (+1) $=\varepsilon Q\oint_{S_\delta}\frac{1}{\delta^2}dS$ (+1) $=\varepsilon Q\cdot 4\pi\delta^2\cdot\frac{1}{\delta^2}$ (+1) $=4\pi\varepsilon Q$ (+1)

以下爲草稿區, 答案寫於此處不記分