微積分 I 之 反函數、不定式　班級_____ 學號______________ 姓名 **Grading Key** 分數 **38**

除是非、填空題外, 每道題必須整齊列出有效之計算、推導式子於給定空白處方予計分。不依指示做答 該題 0 分。

1.**(16)** 將 ♠ 寫成 $e^{\ln ♠}$ 的動作叫做 “to exponentiate ”　$\frac{d}{dx}[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$\frac{d}{dx}[\sinh^{-1} x] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$　$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$　$\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} x] = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \cdot \ln a$, $\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{x \cdot \ln a}$　$\frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$　$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} x] = \frac{1}{1-x^2}$

若 $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ 是不定式 則寫字母「Y」、不是 則寫其值

$\lim_{x\to a} f(x) \searrow 0$ $\lim_{x\to a} g(x) \searrow 0$　$\boxed{\text{Y}}$	$\lim_{x\to a} f(x) \searrow 0$ $\lim_{x\to a} g(x) \nearrow \infty$　$\boxed{0}$	$\lim_{x\to a} f(x) \nearrow \infty$ $\lim_{x\to a} g(x) \searrow 0$　$\boxed{\text{Y}}$
$\lim_{x\to a} f(x) \nearrow \infty$ $\lim_{x\to a} g(x) \searrow 1$　$\boxed{\infty}$	$\lim_{x\to a} f(x) \searrow 1$ $\lim_{x\to a} g(x) \nearrow \infty$　$\boxed{\text{Y}}$	$\lim_{x\to a} f(x) \searrow 0$ $\lim_{x\to a} g(x) \searrow 1$　$\boxed{0}$

2.**(5)** $y = \cosh x,\ x \in [0,\infty)$, 導出 cosh 的反函數 $x = \cosh^{-1}(y)$, 將 x 寫成 y 的表示式及定義域

(*sol.*) 令 $u = e^x$, 原式 $\Rightarrow u^2 - 2yu + 1 = 0$ (+1)

$\Leftrightarrow u = y + \sqrt{y^2-1}$ (+1), $\cancel{y - \sqrt{y^2-1}}$

$(\because u = e^x > 0)$ (+1) 即 $\cosh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ (+1), $y \geq 1$ (+1)

(4) 若 $x = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$, 顯示: $\sec\theta = \cosh x$

(*sol.*) $\cosh^{-1}(\sec\theta)$ (+1) $= \ln(\sec\theta + \sqrt{\sec^2\theta - 1})$ (+1)

$= \ln(\sec\theta + \tan\theta)$ (+1) , 即題目的 x ,

$\therefore \cosh\left(\cosh^{-1}(\sec\theta)\right) = \theta = \cosh(x)$ (+1)

3.**(4)** $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$　基本上 一步一分　§3.7#33

(*sol.*) $= e^{\left(\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x\right)} = e^{\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1/2}}\right)}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ form)

$\overset{\mathscr{L}}{=} e^{\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{(-1/2)x^{-3/2}}\right)} = e^{\left(\lim_{x\to 0^+} -2x^{1/2}\right)} = e^0 = 1$

(3) $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$　基本上 一步一分　§3.7#37

(*sol.*) $= e^{\left(\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}\ln x\right)} = e^{\left(\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{1-x}\right)}$ ($\frac{0}{0}$ form)

$\overset{\mathscr{L}}{=} e^{\left(\lim_{x\to 1^+} \frac{x^{-1}}{-1}\right)} = \frac{1}{e}$

(2) $\lim_{x\to\infty} x\tan(\frac{1}{x})$　§3.7#28

(*sol.*) 原式 $= \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

(2) $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$　§3.7#31

(*sol.*) 原式 $= \ln(\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}) = \infty$

(2) $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^{bx}$　§3.7#36

(*sol.*)

原式 $= \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^{\frac{x}{a}ab} = e^{ab}$

過程、算式 寫於背面 或 此線以下 (草稿區) 皆不記分

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 以零分計算。