微積分 I 之 §11.2–11.9　學號__________　座號___　姓名 ***Grading Key***　分數 **35**

1. 快速判別 絕對收斂 (A)、條件收斂 (C)、發散 (D), 正級數收斂一律寫 A 。(一格一分)

$\sum_n \arctan n$ $\boxed{\text{D}}$, $\sum_n \frac{1}{n\ln n}$ $\boxed{\text{D}}$, $\sum_n \frac{e^{1/n}}{n}$ $\boxed{\text{D}}$, $\sum_n (-1)^n \frac{n}{\ln n}$ $\boxed{\text{D}}$, $\sum_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\boxed{\text{D}}$

$\sum_n \frac{e^n}{n^2}$ $\boxed{\text{D}}$, $\sum_n \frac{1}{n(\ln n)^2}$ $\boxed{\text{A}}$, $\sum_n \frac{1}{n^{1+1/n}}$ $\boxed{\text{D}}$, $\sum_n (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$ $\boxed{\text{C}}$, $\sum_n \frac{n}{(\ln n)^n}$ $\boxed{\text{A}}$

判別 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收斂/發散。憑空猜測不給分, 論述正確才給分。(審斂法代號: G、N、I、P、OC、LC、R、T)

2. $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ **(+4)**

(*sol.*) I: $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ (+1) $= \int_2^\infty \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}$ (+1)
$= 2(\ln x)^{\frac{1}{2}}\big|_2^\infty$ (+1) $= +\infty$, $\therefore \sum_n a_n$ 發散 (+1)。

3. $a_n = n\sin\frac{1}{n}$ **(+2)**

(*sol.*) N: $a_n = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ (+1) $\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$, $\therefore \sum_n a_n$ 發散 (+1)。

4. $a_n = \frac{n!}{e^{n^2}}$ **(+3)**

(*sol.*) R: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ (+1) $= \frac{(n+1)e^{n^2}}{e^{(n+1)^2}} = \frac{n+1}{e^{2n+1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (+1),
類公比 <1 $\therefore \sum_n a_n$ 收斂 (+1)。

5. $a_n = \frac{\ln n}{n^3}$ **(+3)**

(*sol.*) OC: $\ln n < n^p$ $\forall p>0, \Rightarrow \frac{\ln n}{n^3} < \frac{1}{n^{3-p}}$ (+1), 取 $0<p<2$, 則 $\sum_n \frac{1}{n^{3-p}}$ 收斂 (+1)。$\therefore \sum_n a_n$ 收斂。(+1)

6. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **(+3)**

(*sol.*) T: $\sqrt[n]{a_n} = (\frac{n}{n+1})^n$ (+1) $= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$ (+1),
類公比 <1, $\therefore \sum_n a_n$ 收斂 (+1)。

7. $a_n = \sqrt[n]{2} - 1$ **(+4)**

(*sol.*) LC with $\sum_n \frac{1}{n}$ (+1): $\frac{\sqrt[n]{2}-1}{n^{-1}} \overset{\mathscr{L}}{\Rightarrow} \frac{\sqrt[n]{2}\cdot\frac{-\ln 2}{n^2}}{-n^{-2}}$ (+1)
$= \sqrt[n]{2}\ln 2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$ (+1) <1, $\therefore \sum_n a_n$ 收斂 (+1)。

---

8. 推導出 $\arctan x$ 在 0 的展開式 及其收斂域, 然後求出 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ 的值。憑空猜測不給分, 論述正確才給分。

(*sol.*) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$, $x \in (-1,1)$ 時收斂, (+1)
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$, $x\in(-1,1)$ 時也會收斂, (+1)
然而 $x=1$ 代入右邊 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ 是收斂的交錯級數, (+1)
$x=-1$ 代入右邊 $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$ 還是收斂的交錯級數, (+1)
所以 $\arctan x$ 的收斂域是 $[-1,1]$ (+1) 。是以 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ (+1) 。

以下爲草稿區, 答案寫於此處不記分

禁止交談、傳遞物品、掀示考卷、四處張望 .... 做弊者、疑似做弊 警告後再犯者, 以零分計算。