工程光學

劉承揚

電磁學的發展史

- 電磁波首先由詹姆斯·馬克士威(**James Clerk Maxwell**)於1865年預測出來
- 後由德國物理學家海因里希·赫茲(**Heinrich Hertz**)於1887年至1888年間在實驗中證實存在

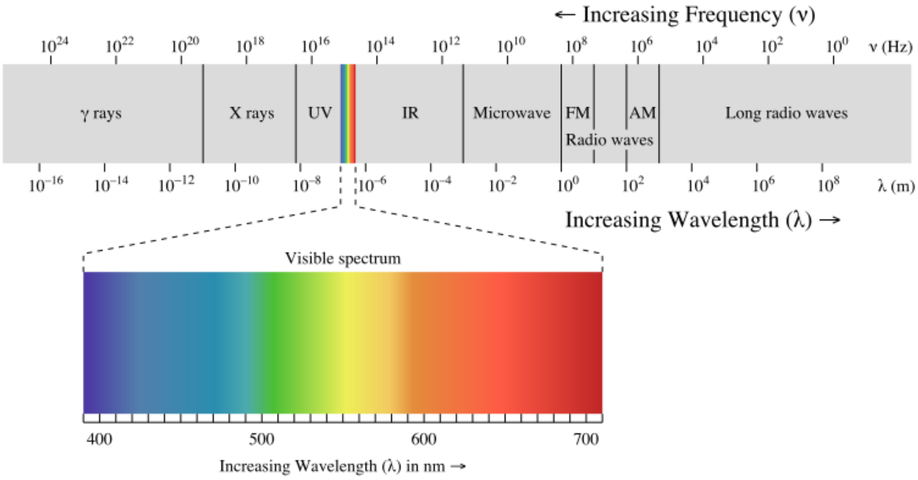
Maxwell

Hertz

電磁學的發展史

- Maxwell推導出電磁波方程式，一種波動方程式，這清楚地顯示出電場和磁場的波動本質。
- 因為電磁波方程式預測的電磁波速度與光速的測量值相等，馬克士威推論光波也是電磁波。
- 電磁波，又稱電磁輻射，是由同相振盪且互相垂直的電場與磁場在空間中以波的形式傳遞能量和動量，其傳播方向垂直於電場與磁場構成的平面。
- 電磁輻射的載體為光子，不需要依靠介質傳播，在真空中的傳播速度為光速。
- 電磁輻射可按照頻率分類，從低頻率到高頻率，主要包括無線電波、微波、紅外線、可見光、紫外線、X射線和伽馬射線。
- 人眼可接收到的電磁輻射，波長大約在380至780奈米之間，稱為可見光。
- 只要是本身溫度大於絕對零度的物體，都可以發射電磁輻射，而世界上並不存在溫度等於或低於絕對零度的物體。因此，人們周邊所有的物體時刻都在進行電磁輻射。

電磁學的發展史



光的古典本質是光頻電磁波

- 19世紀，Maxwell建立了古典電磁理論，把光學現象和電磁現象聯繫起來，指出光也是一種電磁波，即光頻範圍內的電磁波，從而產生了光的電磁理論。
- 電磁場方程式和物質方程式：

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot D = \rho$$
$$\nabla \cdot B = 0$$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$
$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H$$
$$J = \sigma E$$

H 磁場強度向量
E 電場強度向量
D 電位移強度向量
B 磁感應強度向量
ρ 自由電荷密度
J 自由電荷電流密度
ε 介電常數
μ 導磁率
σ 電導率
ε_0和μ_0真空中的介電常數和導磁率

簡化之電磁場方程式和物質方程式

- 在絕大多數的光學問題中，遇到的物質是介電質，於是ρ=0、J=0、μ_r＝1，所以方程式可簡化為：

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$
$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot E = 0$$
$$\nabla \cdot H = 0$$

$$D = \varepsilon E$$
$$B = \mu_0 H$$

其中Hamilton算符 $\nabla = x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}$

電磁場運動方程式

- 經過標準的向量運算可得：

$$\nabla^2 E - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 H - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$$

其中**Laplace**算符 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

電磁場運動方程式

- 與波動方程式比較 $\nabla^2(\ ) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\ ) = 0$
- 電磁波的傳播速度應為 $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}$
- 在真空中 $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.99794 \times 10^8 m/s$$

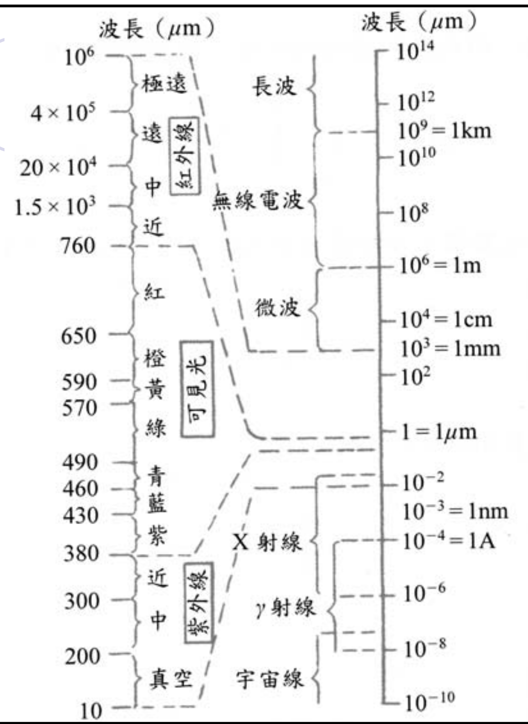
$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2 (F/m)$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot s^2/C^2 (H/m)$

介質折射率

- 光速與介質折射率 $$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}, n = \sqrt{\varepsilon_r}$$
- 因為 $\varepsilon_r > 1$，所以 $v < c$，即介質中的光速總是小於真空中的光速。
- 若n為實數，即為透明介質。
- 若n為複數，即為非透明介質，虛部描述介質對光的吸收損耗。
- 通常介質折射率n是頻率的函數，表明不同頻率的電磁波具有不同的傳播速度，亦稱為介質的色散效應。

電磁頻譜



光頻範圍頻譜

- 紅外線（1 mm～0.76 μm）
  - 遠紅外　1 mm～20 μm
  - 中紅外　20～1.5 μm
  - 近紅外　1.5～0.76 μm
- 可見光（760～380 nm）
  - 紅色　760～650 nm
  - 橙色　650～590 nm
  - 黃色　590～570 nm
  - 綠色　570～490 nm
  - 青色　490～460 nm
  - 藍色　460～430 nm
  - 紫色　430～380 nm
- 紫外光（400～10 nm）
  - 近紫外　380～300 nm
  - 中紫外　300～200 nm
  - 真空紫外　200～10 nm

波動模型

- 描述光波的一個很重要的物理參數是頻率。
- 一個波的頻率是它的振盪率，國際單位制單位是赫茲。每秒鐘振盪一次的頻率是一赫茲。
- 波是由很多前後相繼的波峰和波谷所組成，兩個相鄰的波峰或波谷之間的距離稱為波長。
- 電磁波的波長有很多不同的尺寸，從非常長的無線電波（有一個足球場那麼長）到非常短的伽馬射線（比原子半徑還短）。

光波長、光頻率和光速

- 在真空中，光波長 λ 0、光頻率v和光速c之間的基本關係：

$$c = \lambda_0 v$$

  - 頻率與波長成反比
- 在介質中：

$$\lambda = \frac{1}{n}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{\lambda_0}{n}$$

  - 頻率不變，波長變短

波動模型

- 電磁波的能量，又稱為輻射能。這能量一半儲存於電場，另一半儲存於磁場，用下列方程式表達：

$$u = \frac{1}{2\mu_0}B^2 + \frac{\epsilon_0}{2}E^2\ ;$$

其中，u是單位體積的能量，E是電場數值大小，B是磁場數值大小，ϵ_0是電常數，μ_0是磁常數。

電磁波譜

- 按照波長長短，從長波開始，電磁波可以分類為無線電波、微波、紅外線、可見光、紫外線、X-射線和伽馬射線等
- 普通實驗使用的光譜儀就足以分析從2 nm到2500 nm波長的電磁波
- 人類眼睛可以觀測到波長大約在400 nm和700 nm之間的電磁輻射，稱為可見光
- 每一種電極性分子，會對應著某些特定頻率的微波，使得電極性分子隨著振蕩電場一起旋轉，這機制稱為電介質加熱
- 由於這種機制（不是熱傳導機制），電極性分子會吸收微波的能量。微波爐就是應用這運作原理，通過水分子或脂肪的旋轉，更均勻地將食物加熱，減少等候時間

電磁波譜

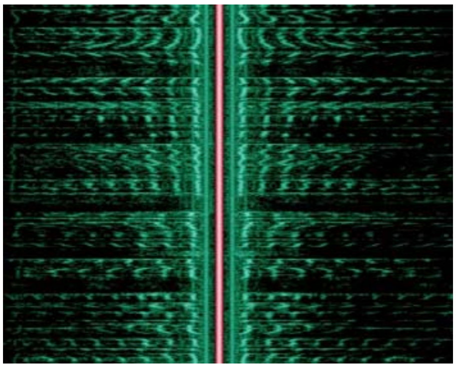
電磁輻射分類：
γ = 伽馬射線
X射線：
HX = 硬X射線
SX = 軟X射線
紫外線：
EUV = 極端紫外線
NUV = 近紫外線
紅外線：
NIR = 近紅外線
MIR =中紅外線
FIR = 遠紅外線
微波：
EHF = 極高頻
SHF = 超高頻
UHF = 特高頻
無線電波：
VHF = 甚高頻
HF = 高頻
MF = 中頻
LF = 低頻
VLF = 甚低頻
ULF = 特低頻
ELF = 極低頻

CLASS: γ, HX, SX, EUV, NUV, NIR, MIR, FIR, EHF, SHF, UHF, VHF, HF, MF, LF, VLF, VF, ELF

FREQUENCY	WAVELENGTH	ENERGY
300 EHz	1 pm	1.24 MeV
30 EHz	10 pm	124 keV
3 EHz	100 pm	12.4 keV
300 PHz	1 nm	1.24 keV
30 PHz	10 nm	124 eV
3 PHz	100 nm	12.4 eV
300 THz	1 μm	1.24 eV
30 THz	10 μm	124 meV
3 THz	100 μm	12.4 meV
300 GHz	1 mm	1.24 meV
30 GHz	1 cm	124 μeV
3 GHz	1 dm	12.4 μeV
300 MHz	1 m	1.24 μeV
30 MHz	1 dam	124 neV
3 MHz	1 hm	12.4 neV
300 kHz	1 km	1.24 neV
30 kHz	10 km	124 peV
3 kHz	100 km	12.4 peV
300 Hz	1 Mm	1.24 peV
30 Hz	10 Mm	124 feV

無線電波

- 在自由空間（包括空氣和真空）傳播的電磁波，其頻率 300GHz 以下（下限頻率較不統一，在各種射頻規範書， 常見的有三：3KHz～300GHz，9KHz～300GHz，10KHz～300GHz）

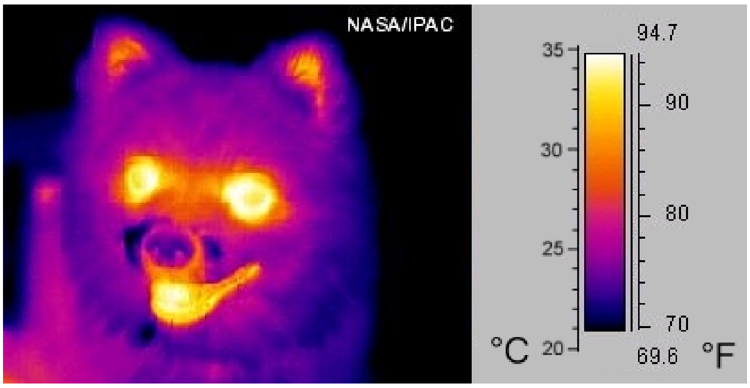


微波

- 指波長介於紅外線和特高頻（UHF）之間的射頻電磁波。微波的波長範圍大約在1m至1mm之間，所對應的頻率範圍是 300MHz（0.3 GHz）至300GHz。
- 在雷達科技、ADS射線武器、微波爐、電漿發生器、無線網路系統（如手機網路、藍芽、衛星電視及無線區域網路技術等）、感測器系統上均有廣泛的應用

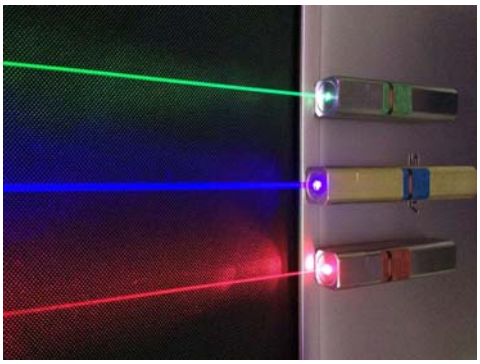
紅外線

- 俗稱紅外光，是波長介乎微波與可見光之間的電磁波，其波長在760 nm至1 mm之間，是波長比紅光長的非可見光，對應頻率約是在430 THz到300 GHz的範圍內。室溫下物體所發出的熱輻射多都在此波段



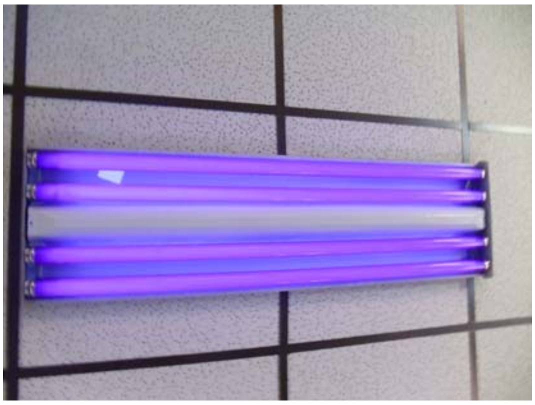
可見光

- 是電磁波譜中人眼可以看見（感受得到）的部分。這個範圍中電磁輻射被稱為可見光，或簡單的稱為光。人眼可以感受到的波長範圍一般是落在390 nm到 700 nm，對應於的頻率範圍在430-790 THz。
- 正常視力的人眼對波長約為555奈米的電磁波最為敏感，這種電磁波處於光學頻譜的綠光區域



紫外線

- 波長比可見光短，但比X射線長的電磁輻射，波長範圍在10 nm至400 nm，能量從3 eV至124 eV之間
- 雖然人的肉眼看不見紫外線，但紫外線卻會造成曬傷的影響

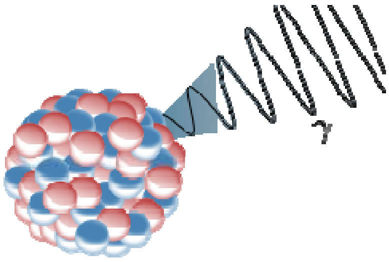


X射線

- 又被稱為艾克斯射線、倫琴射線或X射線，是一種波長範圍在0.01 nm到10 nm之間（對應頻率範圍30 PHz到30EHz）的電磁輻射形式
- 用於醫學成像診斷和X射線結晶學，X射線也是游離輻射等這一類對人體有危害的射線

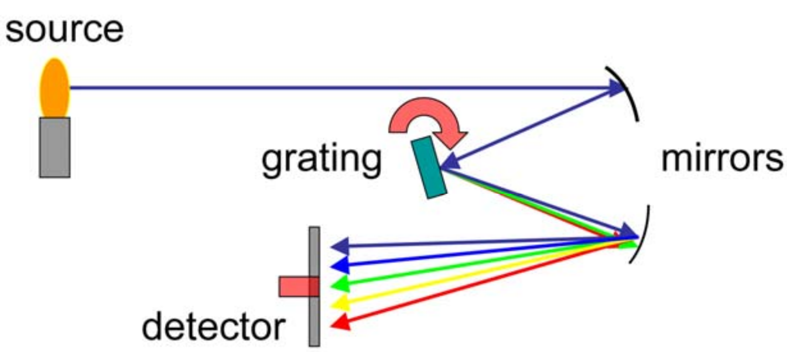
伽馬射線

- 是原子衰變裂解時放出的射線之一。此種電磁波波長極短，穿透力很強，又攜帶高能量，容易造成生物體細胞內的去氧核糖核酸（DNA）斷裂進而引起細胞突變、造血功能缺失、癌症等疾病
- γ射線通過物質並與原子相互作用時會產生光電效應、康普頓效應和正負電子對效應
- 普通放射源如Cs-137放射源產生的γ射線在鋁、鐵、銅、鉛中的半吸收厚度分別約為3.2cm、2.6cm、1.4cm和0.6cm



光譜儀

- 將成分複雜的光分解為光譜線的科學儀器，由稜鏡或衍射光柵等構成
- 應用光學原理，對物質的結構和成分進行觀測、分析和處理的基本設備，具有分析精度高、測量範圍大、速度快和樣品用量少等優點



光的量子本質是光子

- 20世紀初，Einstein建立了光的量子理論，認為光不僅是一種電磁波動，而且是一種粒子，光是由一份一份的光量子(光子)組成的，並以速度c運動的光子流。
- 光的能量E與光波的頻率v相對應：

$$E = hv(J)$$

- Plank常數 h = 6.626 x 10^{-34} J.s
- 頻率越高，相應的光子能量就越大

用光子能量區分的電磁頻譜

輻射類型	頻率（Hz）	波　長	量子能量（eV）
波區 無線電波	$<10^9$	> 300 mm	< 0.000004
波區 微　波	$10^9 \sim 10^{12}$	300～1 mm	0.000004～0.004
區 紅外線	$10^{12} \sim 4.3 \times 10^{14}$	1000～0.76 μm	0.004～1.7
區 可見光	$4.3 \times 10^{14} \sim 5.7 \times 10^{14}$	0.76～0.38 μm	1.7～2.3
區 紫外線	$5.7 \times 10^{14} \sim 10^{16}$	0.38～0.01 μm	2.3～40
射線區 X 射線	$10^{16} \sim 10^{19}$	10～0.03nm	40～4000
射線區 γ 射線	$>10^{19}$	< 0.03nm	> 40000

光子的質量

- Einstein相對論公式 $E = mc^2$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

- 光子的運動質量 $m = \frac{E}{c^2} = \frac{hv}{c}$

- 不同頻率的光子質量不同，頻率越高，質量越大。

光子的動量

- 有質量m和運動速度c的粒子一定有動量，光子的動量：

$$p = |p| = mc = \frac{hv}{c^2} \cdot c = \frac{hv}{c}$$

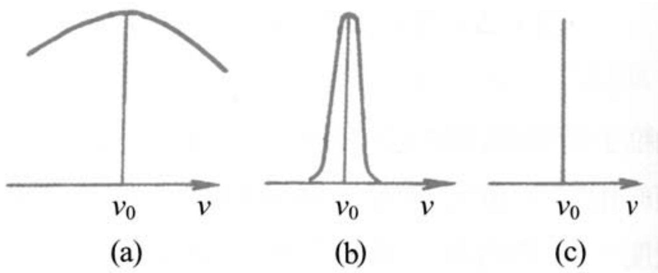
- 因為 $c = \lambda_0 v$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{h}{\lambda_0}$$

- 說明光的波長越短，光子的動量越大。

基本的電磁波

- 單色平面波和球面波
- 可稱為電磁波的基本單元波，意思是任何複雜的電磁波都可以用這兩個基本波的疊加來表示。
- 從電磁波譜的意義上來看，我們通常遇到的光波可以分為三種情況：
  - 複色波
  - 準單色波
  - 單色波



電磁振動方程式

- 單色平面波和球面波都是波動方程式的特解
- 在空間固定點觀察，電磁振動方程式可用餘弦函數表示：

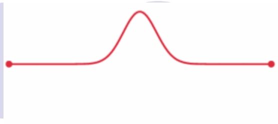
$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \cos(\omega t + \phi_0)$$

- 亦可用複數表示：

$$\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \mathrm{Re}\left[e^{i(\omega t + \phi_0)}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} e^{i(\omega t + \phi_0)}$$

單色波之波動方程式



- 將特解代入電磁場運動方程式，單色波之波動方程式為：

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu_0 \varepsilon E = 0$$
$$\nabla^2 H + \omega^2 \mu_0 \varepsilon H = 0$$

- 令 $k = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$
- 即可得到Helmholtz方程式：

$$\nabla^2 E + kE = 0$$
$$\nabla^2 H + kH = 0$$

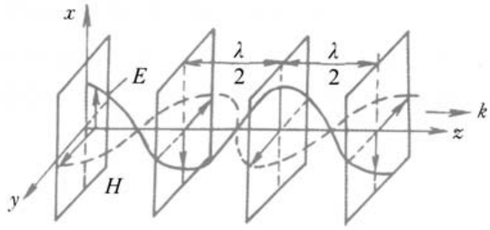
單色波之波動方程式

- 從Helmholtz方程式可看出，電場E和磁場H滿足的方程式完全相同，在波的傳播中起相同的作用。
- 對光與物質的作用來說，E和H的作用並不相同。
- 實驗證明，使照相底片感光的是電場，對人眼視網膜起作用的也是電場。
- 所以通常把電向量E稱為光向量，把E的振動稱為光振動。
- 因此，單色平面波的解為：

$$E = E_0 e^{i(\omega t \pm kz + \phi_0)} = E\cos(\omega t \pm kz + \phi_0)$$

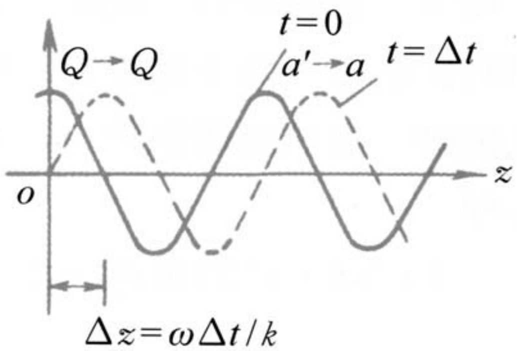
單色波之波動方程式

- 假設平面波是沿z軸傳播，即波向量k平行z，所以kz = k・z。
- 由於▽・E=0，E一定要與k垂直，即E向量位於xy平面內，所以光波是橫波。
- 令 $\phi = \omega t \pm kz + \phi_0$ $\Longrightarrow$ $E = E_0 \cos\phi$
- ϕ為平面波的相位，它是時間和空間的函數，表示平面波在任一時空座標下的狀態。



單色波之波動方程式

- 波動是相位的傳播。
- 使用等相位(ϕ=常數)來描述單色平面波，因為在任一時刻，例如t=0， ϕ=kz=常數。
- 波的傳播可理解為等相位面平面隨著時間t沿傳播方向推進。



單色平面波的重要參數

- 振動頻率v
- 空間波長λ
- 波速V
- 波振幅和光強度
- 初相位和複色波
- 波的偏振(光波的向量性)

振動頻率

- 當波在空間固定點(z=常數)，看到的是波動過程的振動。
- 振動相位隨時間變化，餘弦函數的週期是2π，即振動向量E在一個振動週期T相位變化2π，於是：

$$\int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^T \omega dt$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi v$$

- ω表示每秒內振動相位的變化值稱為角頻率，v表示每秒振動的週期數稱為振動頻率，單位是Hz。
- 在可見光頻段，不同頻率的光波在人的視覺上顯示出不同的顏色。
- 不同的頻率的光波在介質中將顯示出不同的傳播特性。

空間波長

- 波長描述波動的空間週期
- 當t=0時，波的相位變為空間的函數：$\phi = kz + \phi_0$
- 若空間週期為λ，則有：

$$\int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{\lambda} k dz$$

$$\Rightarrow k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- 波數k可稱為空間角頻率，而波長的倒數稱為波傳播方向上的空間頻率f，即：

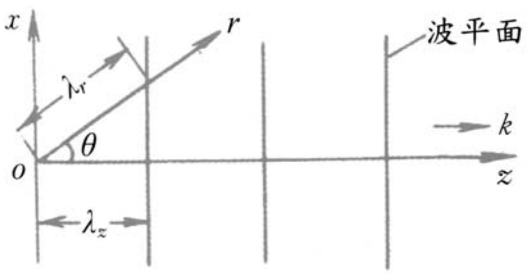
$$f = \frac{1}{\lambda}$$

空間波長

- 波動的空間頻率是觀察方向的函數。
- 當光波在傳播方向(z軸)傳播時，波長是λ，但是若在方向觀察時，波的空間週期變為λ_r，相應的空間頻率變為：

$$f_r = \frac{1}{\lambda_r} = \frac{\cos\theta}{\lambda}$$

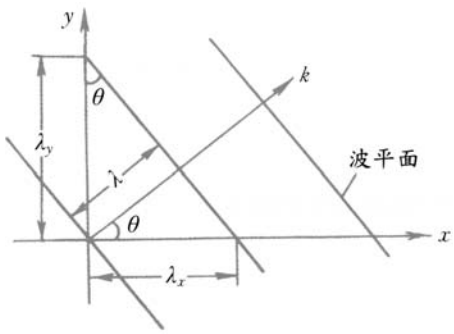
- 當$\theta = \pi/2$時，x方向的空間頻率為0。



例題一

- 如果單色平面波在xy平面內沿著θ方向傳播，寫出平面波表示式，並求x、y、z和z方向的空間頻率
- 假定在xy平面中任意位置向量(即觀察方向)，用r表示：

$$r = xx_0 + yy_0$$
$$k = k_x x_0 + k_y y_0$$
$$k \cdot r = k_x x + k_y y$$



- 波動方程為：

$$E = E_0 \cos(\omega t - k \cdot r + \phi_0) = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot r + \phi_0)} = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y + \phi_0)}$$

例題一

- 空間頻率為：
  - k方向的空間頻率 $f = \frac{1}{\lambda}$
  - x方向的空間頻率 $f_x = \frac{1}{\lambda_x} = \frac{\cos\theta}{\lambda}$
  - y方向的空間頻率 $f_y = \frac{1}{\lambda_y} = \frac{\sin\theta}{\lambda}$
  - z方向的空間頻率 $f_z = \frac{1}{\lambda_z} = \frac{1}{\infty} = 0$
- 因為 $k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2, k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}$
- 空間頻率相互的關係為：

$$f^2 = f_x^2 + f_y^2$$

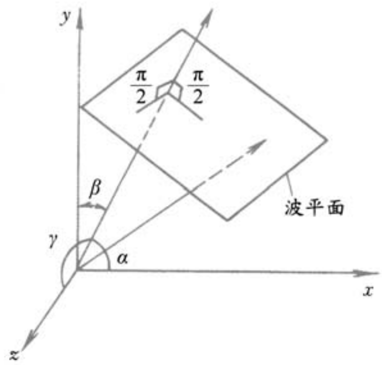
例題一

- 因此在三維空間任意方向傳播的單色平面波的波動方程為：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot r + \phi_0)} = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \phi_0)}$$

- 考慮相互關係：

$$k_x = k\cos\alpha$$
$$k_y = k\cos\beta$$
$$k_z = k\cos\gamma$$



- 波動方程可改寫為：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k\cos\alpha \cdot x - k\cos\beta \cdot y - k\cos\gamma \cdot z + \phi_0)}$$

例題一

- 空間頻率的相互關係：

$$f_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda}$$
$$f_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}$$
$$f_z = \frac{\cos\gamma}{\lambda}$$

- 波動方程又可改寫為：

$$E = E_0 e^{i[\omega t - 2\pi(f_x x + f_y y + f_z z) + \phi_0]}$$

- 資訊光學中推廣空間頻率概念，認為任何週期性的光強度變化可用空間頻率來描述，例如每毫米長度上100條光柵線的空間頻率就是100條/mm。

波速V

- 光頻電磁波的速度為 $V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}$ $\because k = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$
- 單色平面波的速度可表示為 $V = \frac{\omega}{k}$
- 從波動就是相位的傳播，因而波速應等於波等相點傳播的速度，也可以求得波速。
- 將 $\phi = \omega t \pm kz + \phi_0$ 對時間t求導數，且單色平面波的初相位是固定不變的，因此

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega - k\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

波傳方向

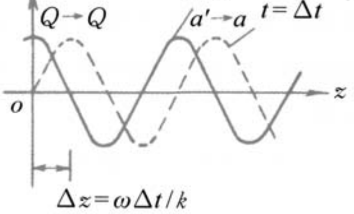
- 波前進的方向由k決定，但在同一方向上有正負之分。令：

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E\cos(\omega t - kz)$$

- 式中wt和kz反號，令t=0，波形曲線如圖所示。
- 觀察Q點的運動。
- Q點的位置相應於z=0，所以Q點的相位 ϕ=0。若經過時間△t之後，相位(ϕ=0)不變的情況下：

$$\omega \Delta t = kz$$

$$z = \frac{\omega \Delta t}{k} > 0$$



- 如圖虛線所示，波向正z方向前進，稱為右行波。

波傳方向

- 同理，若令 $E = E_0 e^{i(\omega t + kz)} = E\cos(\omega t + kz)$
- 經過時間△t之後 $z = -\frac{\omega \Delta t}{k} < 0$
- 表示波向負z方向前進，稱為左行波。
- 如果波動方程式中wt與kz符號相反，就是右行波，波沿正z方向傳播。
- 如果波動方程式中wt與kz符號相同，就是左行波，波沿負z方向傳播。
- 波速V是描述單色平面波等相位面向前推進的速度，又可稱為波的相速。

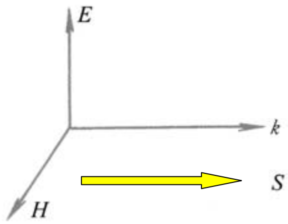
波振幅和光強度

- 波振幅定義為波振幅向量的長度，即 $E = |E|$
- 電磁理論中，描述波動能量傳播的參數是能流向量S，亦稱為Poynting向量，定義為

$$S = E \times H$$

- 單位時間垂直通過傳播方向上單位面積的電磁能量。
- 由 $\nabla \cdot E = 0, \nabla \cdot H = 0$ 可知，E、H和波向量k三者一定互相垂直，即電磁波一定是橫波，因此可求出：

$$S = EH\frac{\vec{k}}{k} = EHk_0$$



- 式中k_0是k的單位向量

波振幅和光強度

- S和k同方向，因為：

$$E = E_0 \cos(\omega t - k \cdot r)$$
$$H = H_0 \cos(\omega t - k \cdot r)$$
$$\Rightarrow S = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - k \cdot r) \cdot k_0$$

- 因為光的頻率太高，至今還沒有能直接響應光頻的探測器，因此對光波強度的量測是時間平均的結果：

$$\langle S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S dt = \frac{1}{2} E_0 H_0 k_0$$

$$\because \sqrt{\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon} E, V = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}} \Rightarrow \langle S \rangle = I k_0$$

- 光強度I (W/m²)

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon V E_0^2$$

初相位和複色波

- 對單色波來說，初相位ϕ_0是指t=0、z=0初始條件下的波相位，且一定是常數。
- 若初相位不是常數，那就表示是複色波。
- 複色波是單色波的疊加： $E = \sum_i E_i \cos(\omega_i t + k_i z + \phi_i)$
- 複色波是十分複雜的波形，為了說明簡單，限定w在w_0附近變化，這樣準單色波可表示為：

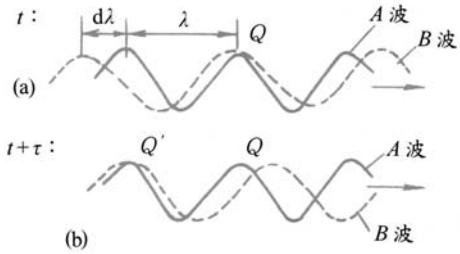
$$E = E_0 \cos(\omega_0 t + \phi(t)) = E_0 \cos \phi(t)$$

- 角頻率定義為相位的時變率： $\omega = \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \frac{d\phi_0}{dt}$
- 頻率的變化範圍為：

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{d}{dt}\phi_0(t)$$

初相位和複色波

- 求複色波的能量傳播速度(群速)的表示式。
- 假定波群只由兩個波長相差很少的A、B波組成
  - A波的波長λ、傳播速度ν
  - B波的波長λ’ = λ+dλ、傳播速度 $\nu' = \nu + \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = \nu + d\lambda$
- 在某一時刻t，A、B波的波峰在Q點重合形成波群的合成波峰，代表了波群的運動。



初相位和複色波

- 經過某一時間τ之後，兩波的波峰在Q’ 點重合，表示波群從Q點移動到Q’ 點，即 $\overline{QQ'} = \lambda$
- 相對介質而言，波群運動速度相對A波要慢λ/τ，於是合成波速為：

$$v_g = \nu - \frac{\lambda}{\tau}$$

- 因為B波相對A波的速度為ν’ -ν，所以：

$$\tau = \frac{d\lambda}{\nu' - \nu} = \frac{d\lambda}{\left(\nu + \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda\right) - \nu} = \frac{d\lambda}{d\nu}$$

- 於是：

$$v_g = \nu - \lambda \frac{d\nu}{d\lambda} = \nu - \beta\lambda$$

- β是色散係數

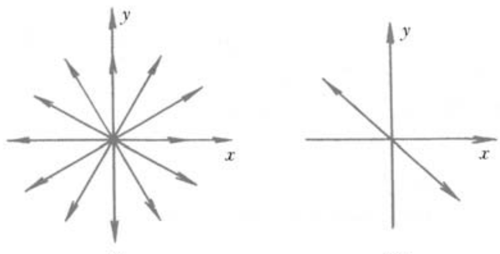
初相位和複色波

$$\beta = \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}$$

- β>0稱為正常色散， $\frac{dn}{d\lambda} < 0, v_g < v$
- β<0稱為反常色散， $\frac{dn}{d\lambda} > 0, v_g > v$
- 群速可以大於相速，也可以小於相速，但是v_g一定小於真空中光速c。

波的偏振(光波的向量性)

- 光波是橫波，意指E在傳播過程中始終位於垂直於傳播方向的橫截面內。在這個橫截面內，電場向量的取向性就是波的偏振。
- 朝著波傳播方向看去，E在橫截面中隨機變化，或者說在360度範圍內等機率分佈，稱為非偏振光或自然光。
- 如果E的方向固定不變或按確定規律變化，則稱偏振光。



(a) (b)

波的偏振(光波的向量性)

- 將E在xy平面分解：$E = E_x + E_y = E_x x_0 + E_y y_0$

$$\because E = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi_0)$$
$$\Rightarrow E = (E_{x0} x_0 + E_{y0} y_0)\cos(\omega t - kz + \phi_0)$$

- 因此E向量的兩個獨立分量為：

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - kz + \phi_x)$$
$$E_y = E_{y0}\cos(\omega t - kz + \phi_y)$$

- E向量的軌跡方程式為：

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{x0}E_{y0}}\cos(\phi_x - \phi_y) = \sin^2(\phi_x - \phi_y)$$

波的偏振(光波的向量性)

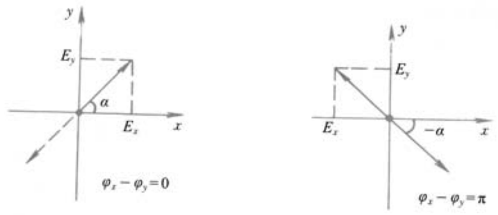
- E向量的軌跡方程式是一個橢圓方程。
- 如果(ϕ_x-ϕ_y)完全隨機變化，橢圓的取向也隨機變化。
- 如果(ϕ_x-ϕ_y)為恆定值，則橢圓確定，表示E在傳播過程中始終沿著橢圓運動，稱為橢圓偏振光。

- 若(ϕ_x-ϕ_y)=mπ ，m=0, ±1, ± 2,…
  - 此時cos (ϕ_x-ϕ_y)= ± 1, sin (ϕ_x-ϕ_y)=0，橢圓方程變為：

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \pm\frac{E_y}{E_{y0}}$$

- 這是直線方程，直線的方位由E_{x0}和E_{y0}的相對大小決定。

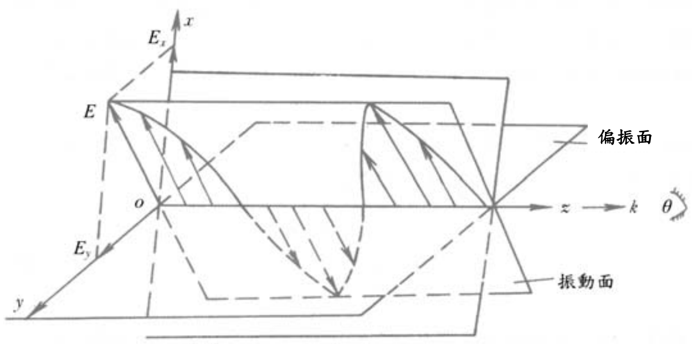
波的偏振(光波的向量性)



- 方位角為： $\alpha=\pm\arctan\frac{E_{y0}}{E_{x0}}$
- 式中取+號時，E_x和E_y同相變化
- 式中取-號時，E_x和E_y反相變化
- 傳播過程中E向量始終在該直線上變化，所以稱為線偏振光

波的偏振(光波的向量性)

- 從空間波形曲線的角度來看



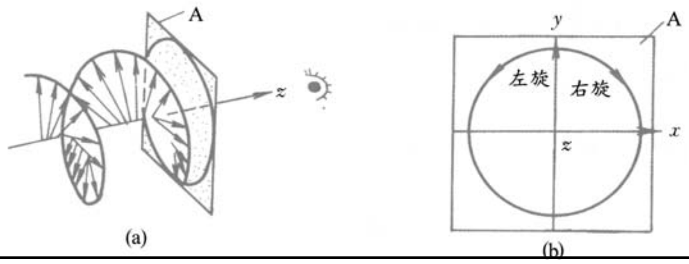
- E始終在同一方位的平面內變化，這平面叫振動面，垂直於該平面的平面叫偏振面

波的偏振(光波的向量性)

- 若(ϕ_x-ϕ_y)=±π/2，橢圓方程變為：

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2=1$$

- 這是一個標準的橢圓方程式，相應的光叫橢圓偏振光。
- 橢圓的方向由E_{x0}和E_{y0}的相對大小決定。
- 當E_{x0}=E_{y0}時，方程式退化成圓方程式，稱為圓偏振光。



波的偏振(光波的向量性)

- 朝著光傳播方向看去，順時針方向旋轉的E稱為右旋轉圓偏光，逆時針方向旋轉的E稱為左旋轉圓偏光。
- 右旋方程式

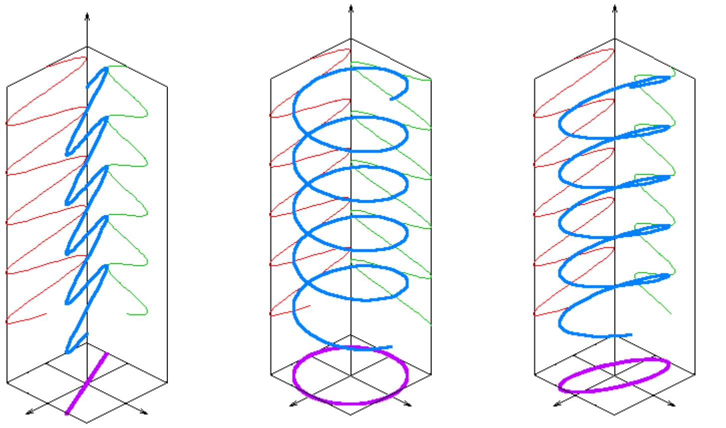
$$E_x=E_0\cos\phi$$
$$E_y=-E_0\sin\phi$$

- 左旋方程式

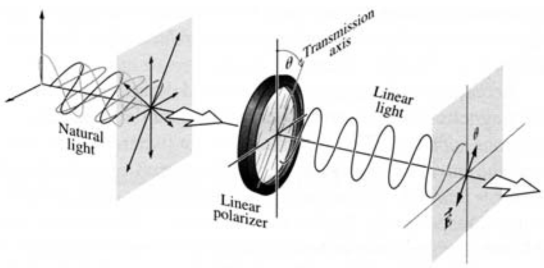
$$E_x=E_0\cos\phi$$
$$E_y=E_0\sin\phi$$

波的偏振(光波的向量性)

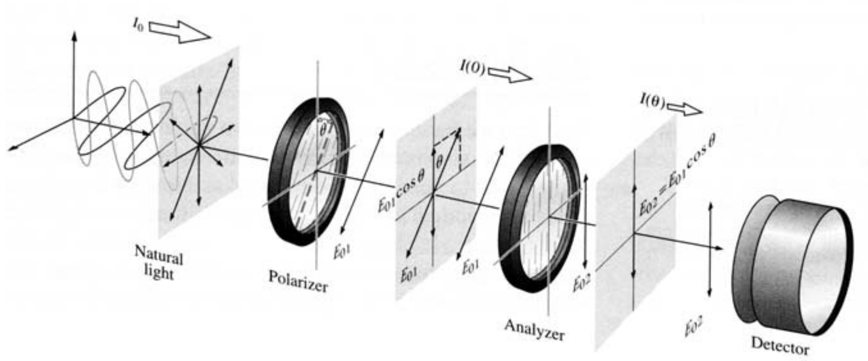
線偏振　圓偏振　橢圓偏振



Polarizer



Malus's law



$$I(\theta) = I(0)\cos^2\theta$$

Brewster's angle

- $n_1 \rightarrow n_2$

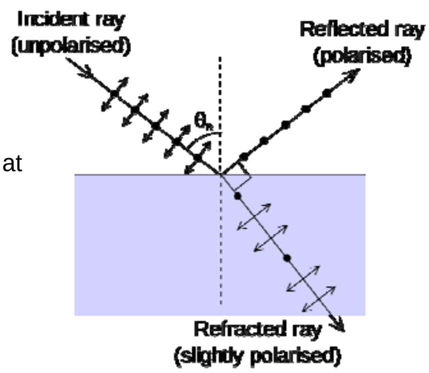
  $\theta_1 + \theta_2 = 90°$

  $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

we can calculate the incident angle $\theta_1 = \theta_B$ at which no light is reflected:

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin(90° - \theta_B) = n_2 \cos\theta_B$$

$$\Rightarrow \theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$



Brewster's angle

兩個單色平面波的干涉

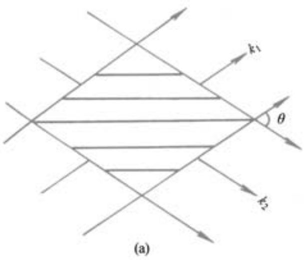
- 具有相同頻率和振幅向量，但傳播方向和初始相位不同的單色平面波：

$$E_1 = E_0 e^{i(\omega t - k_1 \cdot r + \phi_1)}$$
$$E_2 = E_0 e^{i(\omega t - k_2 \cdot r + \phi_2)}$$

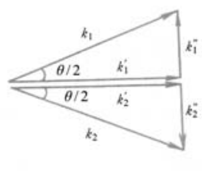
- 兩個波干涉時，干涉條紋一定在兩個波向量角平分線方向走向，因此我們把波向量分解：

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_1' + \mathbf{k}_1'' \equiv \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_2' + \mathbf{k}_2'' \equiv \mathbf{k}' - \mathbf{k}'' \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{k}_1' &= \mathbf{k}_2' = \mathbf{k}' \\ \mathbf{k}_1'' &= -\mathbf{k}_2'' = \mathbf{k}'' \end{aligned}\right\}$$



(a)



(b)

兩個單色平面波的干涉

- 合成電場為：

$$E = \underbrace{2E_0 \cos(\boldsymbol{k}'' \cdot \boldsymbol{r} - \Delta\varphi)}_{\text{振幅}} \qquad \underbrace{e^{i(\omega t - k' \cdot r + \varphi)}}_{\text{相位}}$$

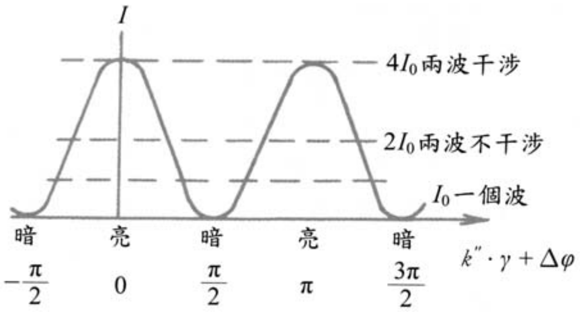
$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \Delta\varphi &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \end{aligned}\right\}$$

- 相應的平均強度為：

$$I = \langle E^2 \rangle = E \cdot E^* = 4E_0^2 \cos^2(k'' \cdot r - \Delta\phi)$$

兩個單色平面波的干涉

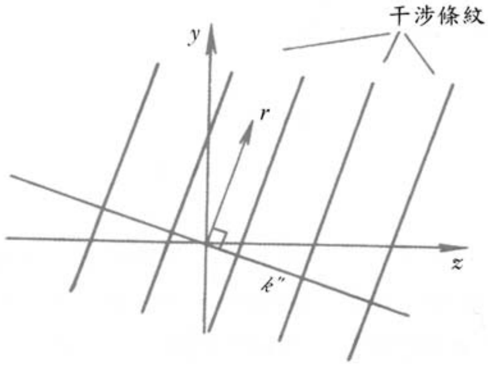
- 穩定干涉場強度與時間無關，與k'也無關，只由 $k'' \cdot r - \Delta\phi$ 決定，即只是空間座標的函數。
- 干涉條紋的明暗條件：
  - 合成光強為0，稱為暗條紋 $k'' \cdot r - \Delta\phi = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ m為整數
  - 合成光強最大，稱為亮條紋 $k'' \cdot r - \Delta\phi = m\pi$



干涉條紋的走向

- 所謂干涉條紋的走向，是指合成光強相等點的空間取向。
- 兩個波干涉時，干涉條紋一定在兩個波向量角平分線方向走向。

$$\because k'' \cdot r = 0 \Rightarrow k'' \perp r$$

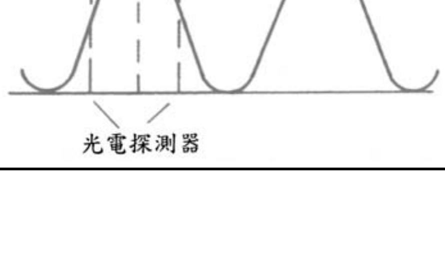


干涉條紋的移動

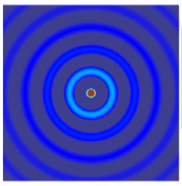
- 在干涉場中固定地點放置光電探測器，這表示r固定，此時合成強度為

$$I = \langle E^2 \rangle 4I_0 \cos^2 \Delta\phi$$

- 可知，當△ϕ隨時間規則變化，或某些原因造成△ϕ變化時，光電探測器上的光強度將隨△ϕ而變。



球面波



- 平面波是球面波的一種極限情況。
- 一個理想點光源所發射的光波就是球面波。
- 從點光源起等距離的空間點構成球面，所以球面波一定沿位置向量r方向傳播，於是 $k \cdot r = kr$
- 球面波方程式為：

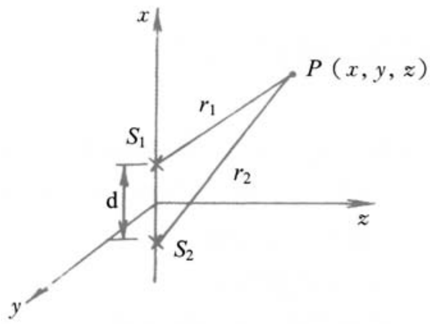
$$E = \frac{E_0}{r}\cos(\omega t - kr + \phi_0) = \frac{E_0}{r}e^{i(\omega t - kr + \phi_0)}$$

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$$

- 等相位面時，r=常數
- 振幅反比於r

兩個單色球面波的干涉

- 點光源S_1、S_2發出的球面波在空間的干涉情況更具有一般性。
- 要決定S_1、S_2發出的球面波在整個重疊區域內干涉條紋的形狀、取向，必須首先求出兩點光源干涉的等光程差點的軌跡，因為干涉條紋是由等光程差的各點連接而成的。



兩個單色球面波的干涉

- 根據幾何關係，S_1、S_2與點P的距離分別為：

$$r_1=\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$
$$r_2=\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$

- 因此在P點兩光源的光程差為：

$$\Delta=r_2-r_1=\sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}-\sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2+z^2}$$

- 消去根號，簡化便得到等光程差面的方程式

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}-\frac{z^2+y^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}=1$$

兩個單色球面波的干涉

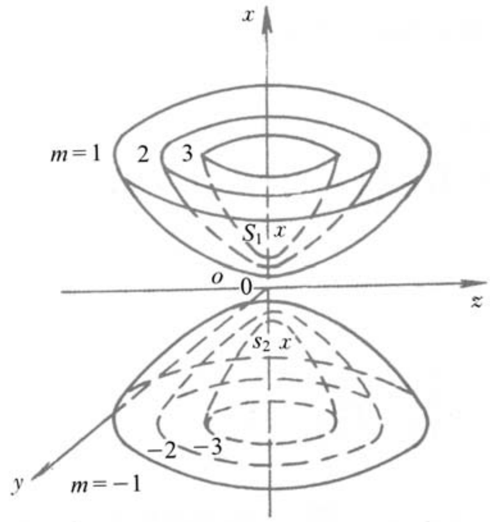
- 當 $\Delta=m\lambda\,(m=0,\pm1,\pm2...)$ 時，P點光強為$4I_0$，即光強度有極大值，對應亮條紋。
- 代入

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2}-\frac{y^2+z^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2}=1$$

- 此方程式表示等光程差面是一組以m為參數的迴轉雙曲面族，x軸為迴轉軸。
- 在觀察屏幕上所看到的干涉條紋就是等光程差面與觀察屏幕的交線。
- 當屏幕設置在z方向上，且與xoy平面平行，在方程式中z為常數，於是交線即干涉條紋是一組雙曲線。

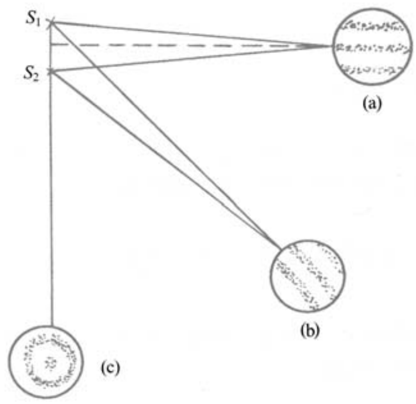
兩個單色球面波的干涉

- 等光程差面



兩個單色球面波的干涉

- 若只考量緊靠z軸附近的條紋，則近似直線，且條紋在S_1和S_2的角平分線方向。
- 圖a就是楊氏干涉實驗，假設z=D，且D>>d。



兩個單色球面波的干涉

$\because r_2^2 - r_1^2 = 2xd$

- 可求出光程差為 $\Delta = r_2 - r_1 = \frac{2xd}{r_2 - r_1}$
- 若在z軸附近觀察，取近似 $r_2 + r_1 \approx 2D$

$$\Rightarrow \Delta = r_2 - r_1 = \frac{xd}{D}$$

- 條紋的強度分佈公式

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi xd}{\lambda D}\right)$$

兩個單色球面波的干涉

- 極大極小強度點條件為：

$$x = \begin{cases} m\frac{D\lambda}{d} \\ \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{D\lambda}{d} \end{cases} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

- 可見條紋垂直於x軸，或平行z軸，m代表條紋的干涉級數。
- 相鄰兩個亮條紋或兩個暗條紋之間的間距為：

$$W = \frac{mD\lambda}{d} - \frac{(m-1)D\lambda}{d} = \frac{D\lambda}{d}$$

- 對確定的D和d，只要測量出W值，即可求出光波長。

實際光源的同調性

- 單色波是一定可以產生干涉的，所以單色波又稱為同調波。
- 相干光波滿足三個條件：同偏振、同頻率、相位差恆定
- 可稱同調條件，相應的光源稱為同調光源
- 光的同調性是討論複色波的同調條件

- 光的同調性通常分為時間同調性和空間同調性
- 時間同調性是指在空間同一點上，兩個不同時刻光波場之間的同調性。或者是說沿著光傳播方向，離開光源不同距離的兩點，在同一時刻光波場之間的同調性。
- 空間同調性是指在同一時刻，垂直於光傳播方向上的兩個不同空間點上光波場之間的同調性。

時間同調性

- 同調時間τ_c和同調長度l_c
- 同調時間是複色光同調性的一個特徵參數。
- 如果複色光的頻帶寬度很大，以致使相位因子成為隨機變量，那同調光場的平均光強度變為：

$$\phi = k'' \cdot r + \Delta\phi$$

$$\Rightarrow I = 4E_0^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi = 2E_0^2$$

- 即同調場的平均強度在整個交疊區域內都等於兩個光場光強之合(強度相加)，不出現干涉條紋，這樣的光波稱為非同調光。

時間同調性

- 光學測量中所用的光源，既非理想的同調光，又非完全的非相干光。

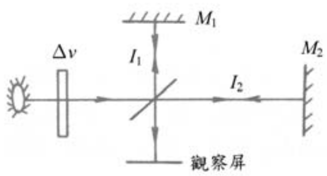
- 理想單色光 $\tau_c \to \infty, l_c = \tau_c$
- 完全非同調光 $\tau_c \to 0, l_c \to \infty$

- 理想單色光之同調長度無窮長
- 完全非同調光之同調長度無窮短

- 同調性是指介於兩個極端狀態之間的同調長度為有限值的情況。

時間同調性

- 使用Michelson干涉儀可以實際量測同調時間。
- 當兩列光波的光程$2l_2-2l_1=\Delta l$差小於某一特徵長度l_c時，觀察屏上有干涉條紋出現
- 當$\Delta l>l_c$時，干涉條紋消失
- l_c定義為同調長度
- 相應的同調時間為 $\tau_c = \dfrac{l_c}{c}$



- 從理論實驗發現

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu} \Rightarrow l_c = \frac{c}{\Delta\nu} \Rightarrow l_c = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

時間同調性

- 光源的同調長度是由光源單色性來決定。
- 同樣的光波列才能同調，即實現振幅相加，同樣的光波列只能強度相加。
- 光波走完特徵波列長度所需的時間就是同調時間。
- 因此，想要獲得好得時間同調性，必須設法改善光源的單色性，即減小頻寬。
- 對於普通光源來說，可使用窄帶濾光片改善單色性，淡也同時減弱了光強，使的干涉場很弱，而無意義。
- 雷射的特性之一，就是單色性好，強度又強，成為理想的同調光源。

時間同調性

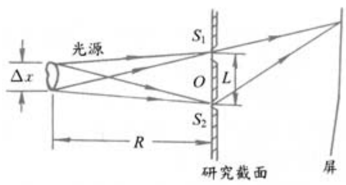
- 準單色光源的譜線寬度和同調長度

光源譜線 λ（nm）		譜線寬度 $\Delta\lambda$（nm）	同調長度 l_c
氪-86	606.78	0.00047	～77 cm
鈉	589.3	0.6	～0.06 cm
汞	546.1	0.01	～3 cm
氦氖雷射	632.8	10^{-8}	～36 km

空間同調性

- 理想單色平面波和球面波一定是完全空間同調，因為其等相面上任意兩點之間保持固定相位差，所以波陣面上任意兩點的光場一定同調。
- 實際光源則不可能成為理想平面波或球面波，所以不可能獲得完全的空間同調性。
- 當實際光源前方截面上用兩個小孔取得兩個小光源進行干涉實驗，兩個小孔間的距離d，在一定的大小內有干涉條紋，超過這個大小干涉條紋消失，我們把這個距離限制所對應的面積定位同調面積A_c。
- 同調面積越大其空間同調性越好。

空間同調性



- 使用楊氏干涉儀來測定同調面積
- 在光源線度Δx、光源與截面距離R固定不變的條件下，改變兩個小孔間距離L，屏上的干涉條紋發生變化。
- 當$L<L_c$時，有干涉條紋
- 當$L>L_c$時，無干涉條紋
- L_c相應的面積為距離R處的同調面積
- L_c由光線線度Δx 、研究距離R以及光波長λ決定，即

$$A_c = L_c^2 \Rightarrow L_c = \frac{\lambda R}{\Delta x} \Rightarrow A_c = \left(\frac{\lambda R}{\Delta x}\right)^2$$

空間同調性

- 當光波長固定時，R越大，Δx越小，同調面積越大，意指光源趨近於點光源。
- 因為R和Δx要實際量測比較困難，所以將同調面積改寫為：

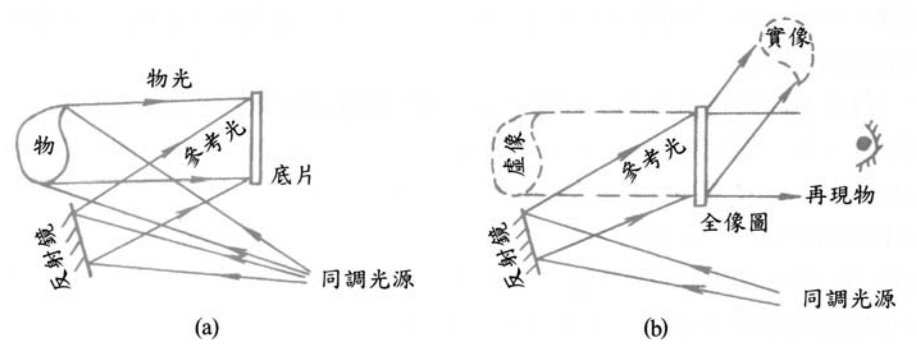
$$A_c = \left(\frac{\lambda}{\theta_s}\right)^2$$

- 式中$\theta_s = \Delta x/R$表示光源線度對研究截面O點所張得平面角，以弧度計量。
- 只要知道光源對研究截面處所張得角度θ_s就可以求出相應的同調面積。
- R越大，空間同調性越好，但光強變弱。

紀錄光波相位

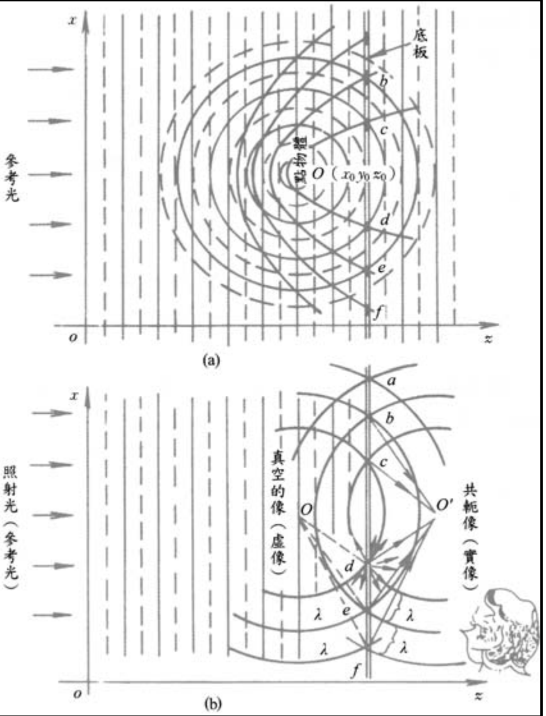
- 使用干涉條紋紀錄光波相位。
- 普通照相是把物體表面反射和散射的光，通過照相鏡頭成像在感光膠片上，在感光膠片上紀錄的只是物體的光強度分佈，得到的是物體的平面像。
- 雷射全像照相術，不用透鏡成像，借助一束參考光與來自物體的反射或散射光在感光膠片上產生干涉，從而紀錄物光的全部訊號，即物光的相位和振幅。
- 其確實的紀錄了物體的三維幾何信息，可以看到物體真實的影像。
- 當變動眼睛的觀察方向時，可以看到物體的側面，即再現的物體是真正的立體像，猶如我們對物體直接觀察一樣。
- 如果全像照片被打碎，用一碎片進行再現，仍能可以觀察到重現像，只是像的清晰度會降低。

紀錄光波相位

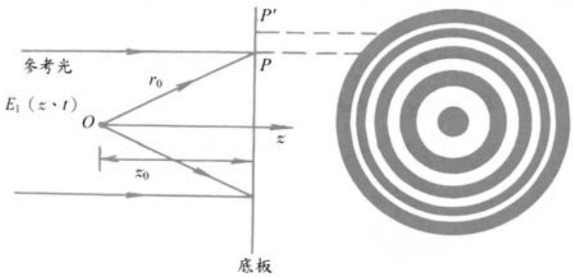


紀錄光波相位

- 用平面參考光照射點物體O，點物體O的散射光是一發散的球面波。
- 圖上a,b,c…各點到O點的距離是波長的整數倍。
- 點物體放在O點，則在O點的散射波的a,b,c…點的相位分佈和把重現光照設在全像圖上，全像圖上的a,b,c…點上的散射波的相位分佈是完全相同的。



紀錄光波相位



- 在全像底片P點上，參考光波和O點散射光波可表示為

$$E_1(z_0,t)=A_1e^{i(kz_0-\omega t)}$$

$$E_2(r_0,t)=\left(\frac{A_2}{r_0}\right)e^{i(kr_0-\omega t)}$$

紀錄光波相位

- 這兩束光在全像底片上干涉疊加，其強度為：

$$I=|E_1+E_2|^2=(E_1+E_2)(E_1^*+E_2^*)=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=|A_1|^2+\frac{|A_2|^2}{r_0^2}$$

$$I_2=\frac{A_1A_2^*}{r_0}e^{-ik(r_0-z_0)}$$

$$I_3=\frac{A_1^*A_2}{r_0}e^{ik(r_0-z_0)}$$

- I_1是r_0即底片上P點位置的函數，而I_2和I_3之和則正比於cos項，即：

$$I_2+I_3\propto\frac{\cos[k(r_0-z_0)+\phi]}{r_0}$$

紀錄光波相位

- 總光強度是r0的函數，呈現出一系列極大和極小點。
- 參考平面波和散射球面波的干涉，在全像底片上產生出一組圓形干涉條紋，且條紋間距為一個光波長。
- 假定全像底片的響應正比於光強I，所以其變黑度正比餘光強I。
- 全像圖的功率透過率為：

$$1-T^2=\alpha I$$

$$\Rightarrow T=(1-\alpha I)^{1/2}\approx 1-\frac{\alpha}{2}I$$

紀錄光波相位

- 用重現光(參考光)照射全像圖，透過全像突的光場信號為：

$$E(z_0,r_0,t)=E_1(z_0,t)=v_1+v_2+v_3$$

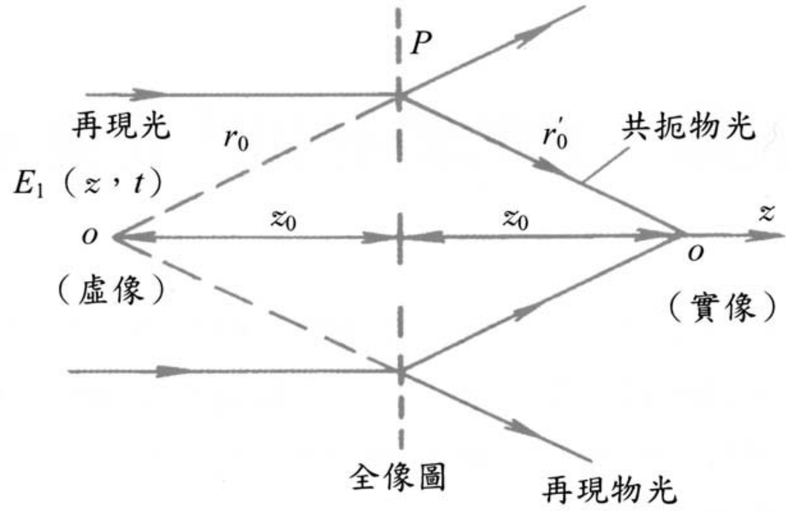
$$v_1=(1-\alpha)\frac{|A_1|^2}{2}-\alpha\frac{|A_2|^2}{2r_0^2}E_1(z_0,t)$$

$$v_2=-\alpha\frac{A_1^2A_2^*}{2r_0}e^{i(2kz_0-kr_0-\omega t)}$$

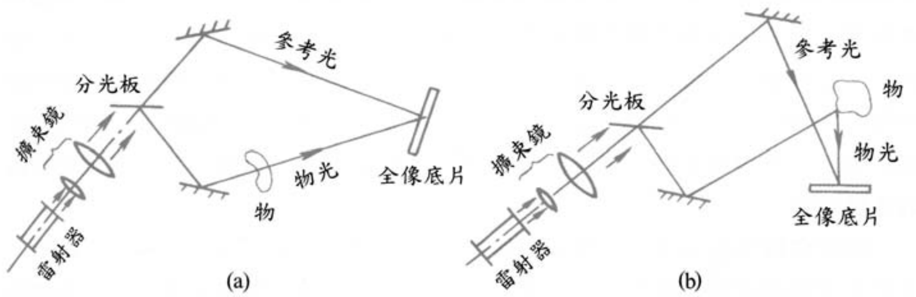
$$v_3=-\alpha\frac{|A_1|^2A_2}{2r_0}e^{i(kr_0-\omega t)}$$

- v1與重現光波相同的平面波，強度上受到衰減
- v2是向O'點會聚的球面波
- v3是與點物O完全相同的球面波，即重現的物光，可看到虛像。

紀錄光波相位



紀錄光波相位



- 全像術要求同調性很高的光源。
- 全像圖是參考光和物光干涉條紋的紀錄，所以在曝光期間要求實驗裝置有很高的機械穩定性。
- 可以用於測量用常規方法無法精確測量的物體形變或形狀等。
- 非拋光面的形狀複雜的表面檢查、微小形變、微小振動、高速運動等。

波動方程式 Wave equation

- 一種重要的偏微分方程式，主要描述自然界中的各種的波動現象，包括橫波和縱波，例如聲波、光波、無線電波和水波。
- 波動方程式應用於聲學、物理光學、電磁學、電動力學、流體力學等領域。
- 歷史上許多科學家，如達朗貝爾(D'Alembert)、歐拉(Euler)、丹尼爾·白努利(Bernoulli)和拉格朗日(Lagrange)等在研究樂器等物體中的弦振動問題時，都對波動方程式理論作出過重要貢獻。

波動方程式 Wave equation

- 雙曲形偏微分方程式的最典型代表，其最簡形式可表示為：
  - 關於位置*x* 和時間*t* 的純量函數*u*（代表各點偏離平衡位置的距離）滿足：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

這裡c通常是一個固定常數，代表波的傳播速率。
在常壓、20°C的空氣中c為343米/秒。
在弦振動問題中，c 依不同弦的密度大小和軸向張力不同可能相差非常大。
在半環螺旋彈簧（一種玩具，英文商標為 Slinky）上，波速可以慢到1米/秒。

波動方程式 Wave equation

- 在針對實際問題的波動方程式中，一般都將波速表示成可隨波的頻率變化的量，這種處理對應真實物理世界中的色散現象。此時，c 應該用波的相速度代替：

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{\omega}{k}.$$

- 實際問題中對標準波動方程式的另一修正是考慮波速隨振幅的變化，修正後的方程式變成下面的非線性波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c(u)^2 \nabla^2 u$$

三維波動方程式

- 描述了波在均勻各向同性彈性體中的傳播。
- 絕大多數固體都是彈性體，所以波動方程式對地球內部的地震波和用於檢測固體材料中缺陷的超音波的傳播能給出滿意的描述。
- 在只考慮線性行為時，三維波動方程式的形式比前面更為複雜，它必須同時考慮固體中的縱波和橫波:

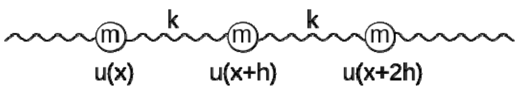
$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

式中：

- λ 和 μ 被稱爲彈性體的拉梅常數（也叫「拉梅模量」，英文Lamé constants 或 Lamé moduli），是描述各向同性固體彈性性質的參數；
- ρ 表示密度；
- $\mathbf{f}$ 是源函數（即外界施加的激振力）；
- $\mathbf{u}$ 表示位移；

純量形式的一維波動方程式

- 波動方程式的推導
  - 一維波動方程式可用如下的方式推導：
  - 一列質量為m的小質點、相鄰質點間用長度h的彈簧連接、彈簧的彈性係數為k：



其中*u*(*x*) 表示位於*x*的質點偏離平衡位置的距離。施加在位於*x*+*h* 處的質點*m* 上的力為：

$$F_{Newton} = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+h,t)$$

$$F_{Hooke} = F_{x+2h} + F_x = k[u(x+2h,t) - u(x+h,t)] + k[u(x,t) - u(x+h,t)]$$

純量形式的一維波動方程式

- 其中F_{Newton}代表根據牛頓第二定律計算的質點慣性力，F_{Hooke}代表根據虎克定律計算的彈簧作用力。
- 所以根據分析力學中的達朗貝爾原理，位於x+h 處質點的運動方程式為：

$$m\frac{\partial^2 u(x+h,t)}{\partial t^2} = k[u(x+2h,t) - u(x+h,t) - u(x+h,t) + u(x,t)]$$

式中已註明u(x) 是時間t 的顯函數。

純量形式的一維波動方程式

- 若N 個質點間隔均勻地固定在長度L = N h 的彈簧鏈上，總質量M = N m，鏈的總體勁度係數為K = k/N，我們可以將上面的方程式寫為：

$$\frac{\partial^2 u(x+h,t)}{\partial t^2}=\frac{KL^2}{M}\frac{u(x+2h,t)-2u(x+h,t)+u(x,t)}{h^2}$$

取極限 $N\rightarrow\infty, h\rightarrow 0$ 就得到這個系統的波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{KL^2}{M}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

在這個例子中，波速 $c=\sqrt{\frac{KL^2}{M}}$。

初值問題的解

- 一維純量形式波動方程式的一般解是由達朗貝爾給出的。
- 原方程式可以寫成如下的算子作用形式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right]u=0.$$

- 從上面的形式可以看出，若F 和G 為任意函數，那麼它們以下形式的組合

$$u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$$

必然滿足原方程式。

初值問題的解

- 上面兩項分別對應兩列行波，F 表示經過該點（X 點）的右行波，G 表示經過該點的左行波。
- 為完全確定F 和G 的最終形式還需考慮如下初始條件：

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

- 經帶入運算，就得到了波動方程式著名的達朗貝爾行波解，又稱達朗貝爾公式：

$$u(x,t) - \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

基本波動方程式是一個線性微分方程式，也就是說同時受到兩列波作用的點的振幅就是兩列波振幅的相加，這意味著可以把一列波分解後再求解。