工程光學-高斯球面性質

劉承揚

球面折射

- 任一個曲面都可看成是由無限個光學平面以不同方位組合而成
- 在光學的應用上，光學曲面比光學平面的應用要廣泛的多，因為具有曲面的元件除了和光學平面一樣會造成光線方向的改變外，還能使光束產生發散(diverge)或會聚(converge)的現象，因而有不同的成像方式
- 在各種特殊形式的曲面中，球面的優點為：設計簡單、便於加工
- 因此，球面是目前實際應用上最常使用的曲面
- 在這章，我們針對球面的光學性質來加以討論

成像系統的光學名詞和概念

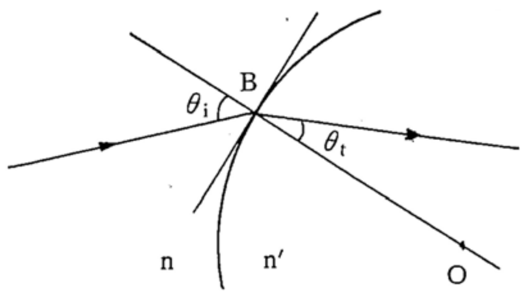
- 真實的光源都是具有體積大小的，然而為了使用上的方便，而有所謂的點光源(point source)，或稱為物點(object point)，這是一個只有幾何位置但沒有體積大小的光源，也是一個實際上並不存在的理想光源
- 在光學系統中，若光線實際上是由某一個點光源發出，則這個點光源是一個實光點或實物點(real object point)
- 若只是實際光線的延伸線虛構成的發光點光源，則這個點光源就稱為虛光點或虛物點(virtual object point)
- 若組成光束的所有光線都會交於某一點，這種光束稱為同心光束，所交會的那一點即稱為此同心光束的心
  - 若同心光束的心為實光點，則此同心光束稱為發散光束
  - 若同心光束的心為虛光點，這個同心光束稱之為會聚光束
  - 若光束為平行光束，即指光束的心在無限遠的地方
- 對於實際上的發光體或物體，可想像成是由許多點光源或物點所構成，而每一個點光源或物點都會發出同心光束，再經由光學系統處理

成像系統的光學名詞和概念

- 單就發光體中一個物點來說，其同心光束經過光學系統後，射出的光束仍會是一個同心光束
- 此同心光束的心，即稱為該物點對光學系統的像點(image point)
  - 若像點是由光線實際交會而成的，稱為實像點(real image point)
  - 若是由光線的延伸線索交會而成的，稱為虛像點(virtual image point)
  - 由實像點所組成的像叫實像(real image)
  - 由虛像點鎖組成的像就叫做虛像(virtual image)

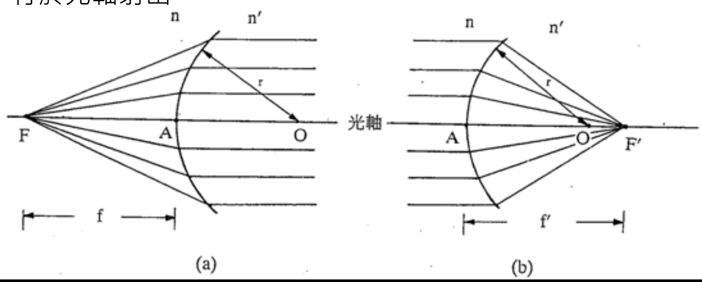
單一球面折射

- 對單一球面而言，若光線入射至球面上的某一點，例如下圖中的B點，則此入射光相當於入射到與球面切於B點的平面上，此平面兩邊介質的折射率分別與球面兩邊介質折射率相同，入射光線將在平面上有反射與折射現象
- 過B點與球心O的連線即為入射光的法線，入射光線將滿足Snell定律的折射角來決定經過球面後的光線走向



單一球面折射-凸球面

- 單一球面，其球心O在球面的右邊，我們定義此球面為凸球面(convex surface)，球面至球心的距離稱為曲率半徑(curvature radius)，以符號r表示
- 光軸是通過球心O的一條直線，光軸與球面的交點A稱為頂點(vertex)
- 取折射率n'的材料，將其一端研磨成一凸球面，放置於n介質中，並假設n小於n'，若把一點光源放置在n介質中的光軸上前後移動，將會發現在某個位置上，此光點所發出的發散光束經球面的折射後，折射光皆平行於光軸射出

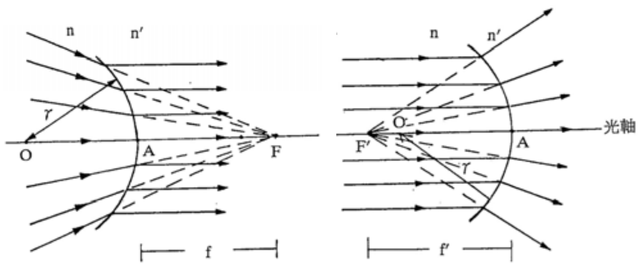


單一球面折射-凸球面

- 圖(a)在此情況下，定義實光點的位置為此單一凸球面的第一焦點(primary focal point)，用符號F表示
- 第一焦點到頂點的距離f稱為第一焦距長(primary focal length)
- 若將一平行於光軸的平行光束射至凸球面，折射光線將會聚至光軸上某一點，我們定義此點的位置為系統的第二焦點(secondary focal point)，如圖(b)
- 第二焦點到頂點的距離f'稱為第二焦距長(secondary focal length)
- 綜上所論，由第一焦點所發出的光線經系統後，必平行光軸射出。平行於光軸的入射光經系統後，必通過第二焦點
- 若光線經系統後以偏向光軸的方向射出，具有這種效果的系統稱為會聚系統(converge system)

單一球面折射-凹球面

- 球心在球面左邊的情形，此球面定義為凹球面(concave surface)
- 將n'材料的一端磨成凹球面，放置於疏介質n中，則將會發現在光軸某位置上的虛光點所發出的會聚光束經凹球面後，折射為平行於光軸的平行光束
- 平行於光軸入射的平行光束，經凹球面後，折射光的延伸線亦會在軸上交於一點



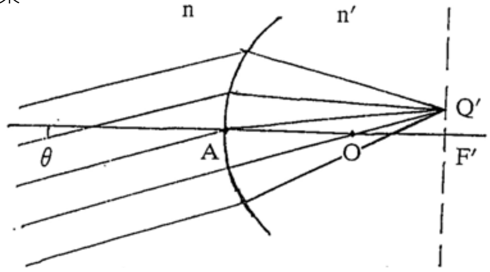
(a) (b)

單一球面折射-凹球面

- 我們同樣可以定出在n小於n'的情況下，凹球面系統的第一焦點F，第一焦距長f，第二焦點F'和第二焦距長f'
- 由圖中可知，光線經過系統後是以偏離光軸的方向射出，稱為發散系統(diverge system)
- 另一方面來說，若介質的分佈相反，亦即n為密介質，n'為疏介質，則在滿足Snell定律的折光條件下，焦點的位置將會有所變動
  - 對凸球面系統來說，第一焦點將在凸球面頂點的右邊，第二焦點的位置在頂點的左邊
  - 對凹球面系統而言，第一焦點將在頂點的左邊，第二焦點在頂點右邊
- 由此可見，焦點位置的決定，取決於兩個因素：
  - 球面的凹凸形狀
  - 球面兩邊介質折射率的相對大小
- 此外，在凸或凹球面系統中，第一焦距長和第二焦距長並不相等，兩焦距長的比值和球面兩邊折射率的比值有關

焦平面

- 通過焦點與光軸垂直的平面，定義為焦平面(focal plane)
- 我們用一個使光束會聚的凸球面系統來加以說明，如下圖
  - 通過第二焦點的平面為第二焦平面，由前面的定義可知，平行於光軸的平行光束經球面折射後會聚於第二焦點上
  - 凡平行光束經球面折射，必會聚於第二焦平面上
  - 與光軸夾θ角度的平行光束，折射後會聚於焦平面上的Q'點
  - 由第一焦平面上離軸的點光源所發出的光束，經球面折射後，會形成與軸夾θ角的平行光束



高斯光學

- 在處理實際的光學系統成像問題時，某一物點發出的許多條光線，在每一光學面上利用Snell定律計算其位置和光程後，這些光線並不能均會聚成一個像點，這種失真的原因即在於系統存在有像差的問題
- 在幾何光學中，要解決實際光學系統的成像問題時，為了避免像差的影響，經常要利用理想光學系統的成像概念
- 一物點經光學系統後只形成一個像點，而且任一直線所成的像也必為一直線
- 這種以理想光學來取代的作法，可以省卻許多繁複的計算，而且計算結果也具有相當程度的準確性
- 理想光學系統的理論是在1841年由Gauss建立的，所以可把這種光學理論稱為高斯光學(Gauss optics)
- 高斯光學中的方程式都是屬於線性一階方程式，在三角函數中，正弦函數的值在小角度時，可直接以角度值取代，亦即：

$$\sin\theta \cong \tan\theta \cong \theta, \cos\theta \cong 1$$

高斯光學

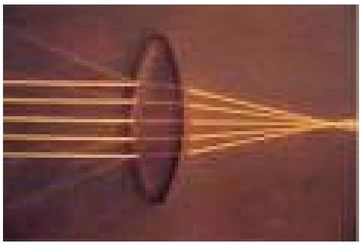
- 高斯光學也稱為一階光學(first order theory of geometrical optics)
- 小角度條件限制了光線距軸的高度必須在光軸附近，所以又稱為近軸光學(paraxial theory of geometrical optics)
- 在高斯光學的條件下，Snell定律可改寫為：

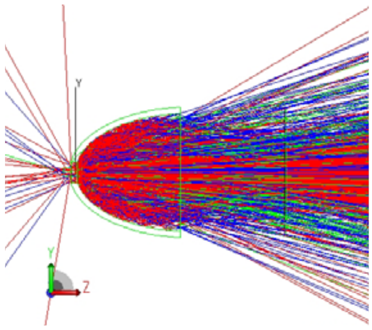
$$n\theta_i = n'\theta_t$$

- 因此，具有曲率的界面也可將視為一平面看待，如此在圖解問題時將方便許多

圖解成像

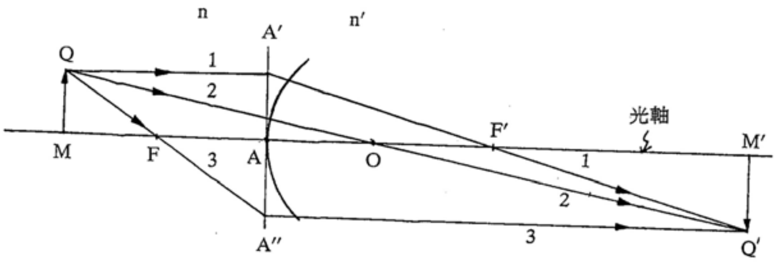
- 成像系統中，物與像之間的關係，可以用繪圖的方式得到，下面就介紹幾種圖解成像法：
  - 平行光線繪圖法(parallel ray method)
  - 斜線繪圖法(oblique ray method)





平行光線繪圖法

- 凸球面的成像範例
- 假設$\overline{QM}$為一正立在光軸上方的物，放置在凸球面左邊的n介質中，而凸球面右邊的材料折射率為n'，在n<n'的條件下，這是一個會聚系統
- 第一焦點在頂點的左邊，第二焦點在頂點的右邊，利用焦點定義就可以將像的位置和大小決定出來

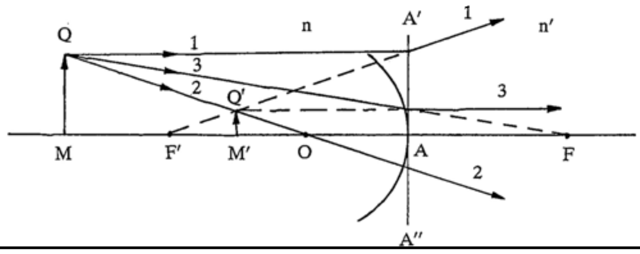


平行光線繪圖法

- 光線1，選取由物點Q發出平行於光軸的光線，此光線必經過系統的第二焦點
- 光線3，選取由Q發出經過系統第一焦點的光線，此光線最後必平行光軸射出
- 利用光線1和光線3的交會點，即可定出物點Q的像點Q'，Q'到光軸的垂線M'，即為物體成像的位置，而$\overline{Q'M'}$即為物$\overline{QM}$的像，所成的像是一個由實際光線會聚而成的倒立實像
- 在繪圖過程中，n、n'介質的界面為凸球面，在近軸條件下，可以用平面A'A"代替，因此所畫的光線至平面A'A"上即開始發生偏折，會聚的Q'是一個沒有像差的理想像點
- 光線2，也可以加以利用來決定像點位置，此光線是由物點Q所發出，指向球面球心的一條，由於此光線過球心，故在界面A'A"上是以0度的入射角入射，所以不會發生偏折而保持原來方向繼續行進，和光線1、光線3會聚於Q'點
- 這種利用光線1、2、3的偏折而取得成相位置、像的大小和方位變化的方法，稱為平行光線繪圖法

平行光線繪圖法

- 凹球面的發散系統
- 系統的第一焦點在凹球面的右邊，而第二焦點在凹球面的左邊，折射率的關係為n<n'
- 光線1，平行光軸，經過界面A'A"後，折射光的延伸線必通過F'點
- 光線2，通過球心不偏折的光線
- 光線3，選取的是指通過第一焦點F的光線，在遇到界面A'A"後，將平行於光軸射出
- 這三條光線所交會的點，是由其延伸線交會而成，所以是一個虛的像點Q'，Q'M'稱為QM的虛像



平行光線繪圖法

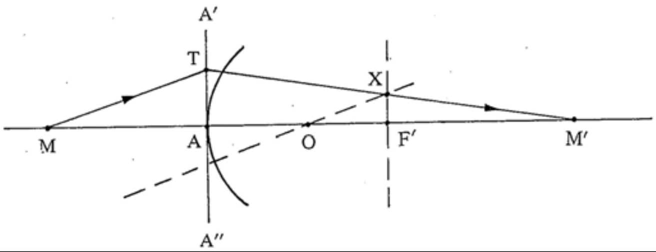
- 在上圖中，由Q點所發出的光線，經球面折射後，折射光或其延伸線都會通過Q'，這也就是像點的定義
- 由物點所發出的同心光束，經系統作用後亦為一同心光束，此同心光束的心稱為像點
- 同理，由物點M所發出的光線，經球面折射後，這些光線必會聚在像點M'上

斜線繪圖法

- 平行光線繪圖法可以決定出一個離軸物點的成像位置，但若是位於軸上的物點，例如上圖的M點，我們就無法利用相同的方法來得到M'的位置，此時就必須藉助斜線繪圖法的幫助
- 斜線繪圖法是針對軸上物點的成像作圖法

斜線繪圖法

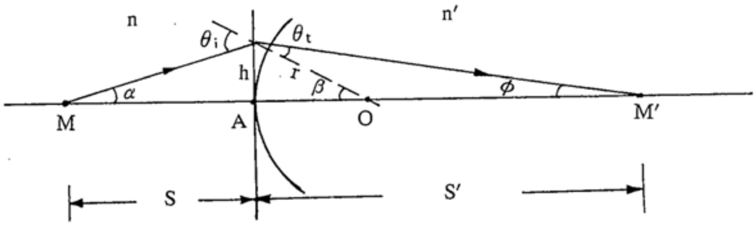
- 由軸上物點M所發出光線中，任取一條不平行光軸的斜線
- 例如光線$\overline{MT}$，然後過球心O作一條和$\overline{MT}$光線平行的輔助光線$\overline{OX}$
- 平行光束經過一系統，必會聚在焦平面上，故對$\overline{MT}$與$\overline{OX}$所組成的平行光束而言，也必會聚在第二焦平面$\overline{XF'}$上
- 又因經過球心的光線不會發生偏折，所以$\overline{MT}$光線在經界面A'A"折射後，必通過$\overline{OX}$光線與焦平面$\overline{XF'}$的交點X
- $\overline{TX}$即為入射線$\overline{MT}$的折射光線，折射光與光軸的交點M'，即為物點M的像，M'是一個實像點



成像公式

- 成像公式的規則與符號：
  - 在所畫的光路圖中，光線皆由左向右傳播
  - 物距在頂點的左邊，取為正值，若在頂點右邊，其值為負
  - 像距在頂點的右邊，取為正值，若在頂點左邊，其值為負
  - 會聚系統的第一焦距、第二焦距，其值均取為正
  - 發散系統的第一焦距、第二焦距，其值均取為負
  - 凸球面的曲率半徑其值為正，凹球面的曲率半徑其值為負
  - 物高與像高之值，若從光軸向上測量，則取為正值，從光軸向下測量，其值為負

成像公式



- 物點M所發出的任一條斜線，經過界面折射後形成像點M'，由圖中的幾何關係，可以將單一球面的近軸成像理論推導出來，因為：

$$n\sin\theta_i = n'\sin\theta_t$$

- 由幾何關係知：$\theta_i = \alpha + \beta, \beta = \theta_t + \phi$
- 在高斯光學範圍中，可將上式改為： $n\theta_i = n'\theta_t$
- 且： $\alpha \cong \frac{h}{s}, \beta = \frac{h}{r}, \phi \cong \frac{h}{s'}$
- 由上式知：$\theta_t = \beta - \phi$

成像公式

- 將 $\theta_i = \alpha + \beta$ 除以 $\theta_t = \beta - \phi$ ，並和$n\theta_i = n'\theta_t$ 比較可得：

$$\frac{\theta_i}{\theta_t} = \frac{\alpha+\beta}{\beta-\phi} = \frac{n'}{n}$$

- 再將$\alpha \cong \frac{h}{s}, \beta = \frac{h}{r}, \phi \cong \frac{h}{s'}$ 代入上式，整理後可得：

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{r}$$

- 上式為物體對單一球面的成像計算，稱為高斯公式(Gaussion formula)
- s為物到頂點的距離，稱為物距
- s'為像到頂點的距離，稱為像距
- r為單一球面的曲率半徑

折光率

- 高斯公式等號右邊的量，我們定義其為此單一球面的折光率(refracting power)，用符號P表示：

$$P = \frac{n' - n}{r}$$

- P值越大，表示光經球面後的偏折也越大
- P的單位是長度單位的倒數，習慣上式以公尺的倒數表示，即m^{-1}
- 對會聚系統而言，P值為正，表示此單一球面系統的第一焦點在頂點的左邊，而第二焦點則在頂點的右邊，系統的二個焦距長皆為正值
- 若P為負值，所對應的是一個發散系統，第一焦點在頂點的右邊，第二焦點在頂點的左邊，二個焦距長也皆為負值
- 由上可知，折光率和焦距有直接的關係

折光率

- 對一個有會聚作用的單一球面系統而言，若將一物放置在頂點左邊無限遠處，物所發出的光線對球面來說，就相當於是個平行光束，由第二焦點的定義可知其成像必在第二焦平面上：

$$s = +\infty \Rightarrow s' = f'$$

- 代高斯公式入可得：

$$\frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{r}$$

- 若將物放置在第一焦平面上，則也可由第一焦點的定義知，成像必在頂點右邊無限遠處，亦即：

$$s = f \Rightarrow s' = +\infty$$

- 代高斯公式入可得：

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{r}$$

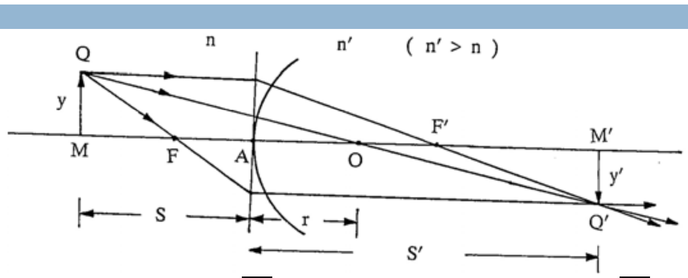
折光率

- 比較上述兩式，可得：

$$\frac{n'}{f'}=\frac{n}{f}=\frac{n'-n}{r}$$

- 上式說明了單一球面系統的兩焦距長並不相等，而與界面二邊介質的折射率有關
- 也說明了折光率與焦距監的關係
- 利用上式和高斯公式，我們可以很容易的求出系統的焦點位置和軸上像點位置，但無法求得像的大小和方位

成像放大率



- Q為離軸最遠的物點，$\overline{MQ}$為物高，以y表示，所成的像$\overline{M'Q'}$為像高y'
- y'本身是一個負值，y、s、s'、r、f、f'均為正值
- 利用△ QMO與△ Q'M'O的相似關係，可求得兩三角形三邊邊長比：

$$\frac{-y'}{y}=\frac{s'-r}{s+r}$$

- 像高y'與物高y的比值，可定義為橫向放大率(lateral magnification)，用m表示：

$$m=\frac{-y'}{y}=-\frac{s'-r}{s+r}$$

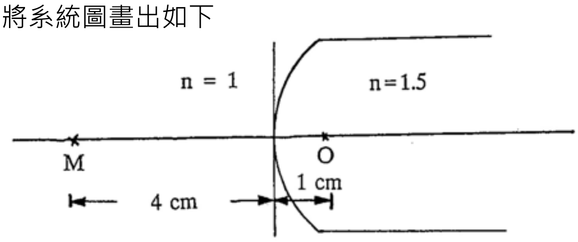
成像放大率

- 若橫向放大率為正值，表示所成的像是一個和物同方位的虛像
- 若橫向放大率為負值，則所成的像就是和物相反方位的實像

範例1

- 取一折射率為1.5的玻璃棒，將棒的一端研磨成曲率半徑為1 cm的凸球面，一物點放置在距頂點左邊4 cm的空氣中，求(a)系統之折光率、(b)系統的焦點位置、(c)像點位置、(d)物的橫向放大率、(e)像的性質，是實像或虛像

依題意可將系統圖畫出如下



(a)將n=1，n'=1.5，r=1 cm，代入折光率公式，得

$$P=\frac{n'-n}{r} \qquad P=\frac{1.5-1}{1}=0.5\,cm^{-1}$$

範例1

(b)由折光率為正值可知這是一個會聚系統，兩焦距長可利用

$$\frac{n'}{f'}=\frac{n}{f}=\frac{n'-n}{r} \qquad \frac{1.5}{f'}=\frac{1}{f}=0.5\,cm^{-1}$$

f = 2 cm, f’ = 3 cm

第一焦點位於頂點左邊2 cm處，第二焦點在頂點右邊3 cm處

(c)利用高斯公式求得成像位置

$$\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=P,\ \frac{1}{4}+\frac{1.5}{s'}=0.5\,\mathrm{cm}^{-1},\ s'=6\,\mathrm{cm}$$

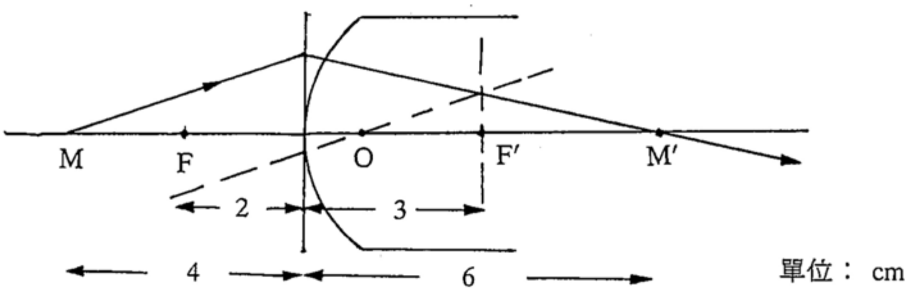
成像位置在距頂點右方6 cm的玻璃內

(d)橫向放大率

$$m=-\frac{s'-r}{s+r}=-\frac{6-1}{4+1}=-1$$

因為m為負值，故所成像為一實像點

範例1



物與像的關係

- 由於光具有可逆性(reversibility)，所以光學系統中，物像關係是可以互換的
- 若以像都做物，則光線由右至左經系統後，所成的像必為原來的物
- 這種具有可逆性的關係恰好可用數學中複數的共軛關係來描述
- 假設物用複數a+ib表示，而成像過程看作是對物取一次共軛(*)的運算子，亦即：

$$(a+ib)^* = a - ib$$

- 若將所成的像當成物，則再經一次成像過程後，可得：

$$(a-ib)^* = a + ib$$

- 由上可知，所取得的像即為原來的物，
- 因此高斯光學中，物點與像點間的關係，稱為共軛點(conjugate points)
- 例如圖解成像法中，Q、Q'為一對共軛點，M、M'亦為一對共軛點，而$\overline{QM}$與$\overline{Q'M'}$為一對共軛限(conjugate lines)