表6.20的二項分配與波瓦松分配可繪製如圖6.12的二項分配圖及圖6.13的波瓦松分配圖。圖6.14是將二項分配圖與波瓦松分配圖繪製在一起。由圖6.14很容易看出兩者差異不大，故可以波瓦松分配來代替二項分配。

圖6.12　二項分配

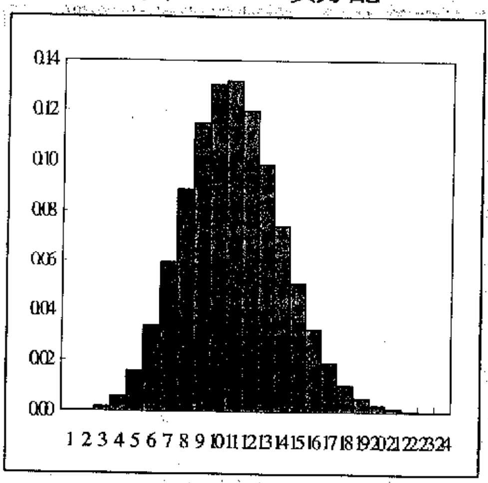


圖6.13　波瓦松分配

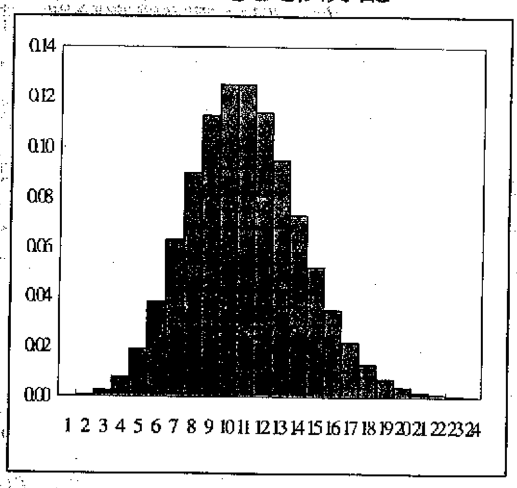
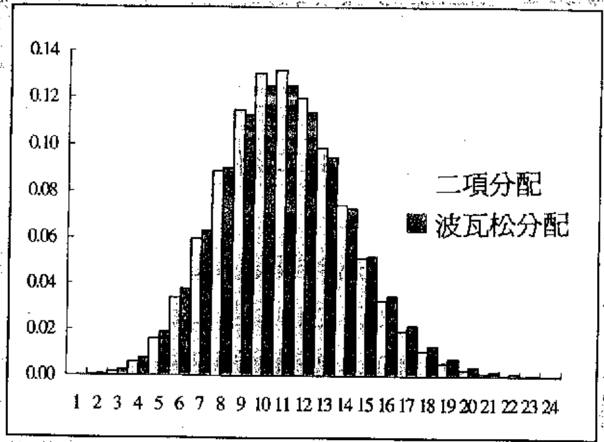


圖6.14　二項分配與波瓦松分配



6.7　幾何分配

我們有時會碰到一些情況，像參加研究所考試，公務人員乙種、丙種考試，不是第一次就考上，乃是考了好幾次後才考上。又如某些實驗，某些新

技術、新產品的研發，也是經過無數次的試驗才成功。像這些事件直到成功時的試行次數的機率函數就是幾何分配。

6.7.1 幾何分配的定義

在一個二項隨機實驗裡，若不定義 X 爲 n 次試行成功之次數，而定義 X 爲第一次成功所試行之次數，即

若 $X=1$ (試行一次就成功)，則其機率 $f(x)=p$ 。
若 $X=2$ (試行二次才成功)，則其機率 $f(x)=qp$ 。
若 $X=3$ (試行三次才成功)，則其機率 $f(x)=q^2p$ 。

因此，可一般化表示爲：

幾何分配

設 X 爲一間斷隨機變數，若

$$f(x)=q^{x-1}\cdot p \quad x=1,2,\cdots,\infty \tag{6.31}$$

則 $f(x)$ 爲幾何分配。

式中 x ：直到第1次成功試行的總次數， p 爲成功的機率， q 爲失敗的機率， $q=1-p$ 。

幾何分配滿足機率分配的二條件如下：

① $\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1}p=\frac{p}{1-q}=1$

② $0\le f(x)\le 1$

6.7.2 幾何分配的特性

幾何分配的特性如下：

(1)幾何分配的平均數與變異數

平均數

$E(X)=\frac{1}{p}$

變異數

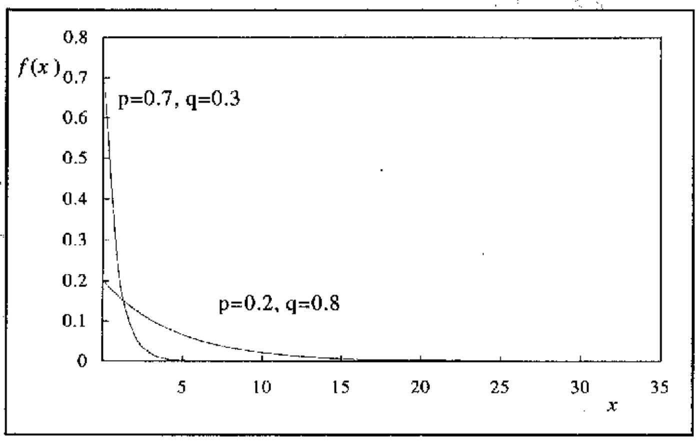
$$V(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

證明請參見數學附錄。

(2)幾何分配爲一右偏分配

幾何分配爲一個右偏分配如下圖：

圖6.15　幾何分配



<例6.31> 求神拜佛

一般人遇到事業或生活上的疑難無法定奪時，除了尋求長輩、智者或看心理醫生外，最常見的方法是到廟裡求取神諭，也就是抽籤。更有趣的是台灣2000年總統大選，有些總統候選人也經常到各地廟宇燒香拜佛，一方面除了祈求國泰民安以外，另一方面也祈求神明保佑順利當選以便爲國效勞。不過想要得到神明的指點，可不是燒香拜拜後就直接到籤筒內抽一枝竹籤就可以，而是需要先問問神明願不願意指點，詢問的方式是大家熟悉的擲茭杯。一般的規矩是，擲出一正一反的茭杯即表示神明願意指示；二個反面表示神明在生氣；二個正面表示神明發笑，也許是笑問題的愚蠢，也可能是笑求籤者心理已有答案，何必多此一舉。當然，正常狀況下，求籤者都希望神明能指點，故而期望茭杯能出現一正一反。但是若是無限制的擲下去，茭杯終必會出現一正一反，如此一來神明必定生氣，因爲簡直

就是硬逼著同意嘛！效果也就大打折扣了。因而又有一條規矩，凡擲三次仍未得神明首肯者，請回去想清楚，或是多積功德後再來。

天威雖難測，但卻可利用幾何分配來稍窺其貌。一個茭杯出現正面或反面的機率假設為1/2，則一對茭杯出現一正一反的機率也會是1/2。令 X 為擲茭杯直到出現一正一反時，總計擲的次數。那獲得神明首肯的機率為：

$$P(X \le 3) = \sum_{x=1}^{3}(\frac{1}{2})^{x-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=0.875$$

機率相當高，因此乃顯示神明澤惠眾生，問題愚昧者或誠心向善者未嘗無誨焉！

另外，X 的期望值為：

$$E(X) = 1/p = 2$$

表示一般人擲2次就可得到神明指點迷津．若是你擲第3次才成功的話，或許該檢討一下，是否「為人謀而不忠乎？與朋友交而不信乎？傳不習乎？」。 ■■■

<應用例> 過五關斬六將

郊遊聯誼時，玩玩撲克牌遊戲是打破隔閡的方法。不過，若是玩些複雜沉悶的遊戲，比如橋牌，反而令人興味索然，自以為才智過人的同學切記不要弄巧成拙。

常玩的遊戲裡，「10點半」算是再簡單不過了，連小學生也會玩。撲克牌不分花色，由A到10，其點數仍依照牌上號碼，但「J」、「Q」和「K」則視為半點。比方說你拿到「$AJ8$」三張牌，點數就是 $1 + 0.5 + 8 = 9.5$。遊戲時每人先發給一張牌，其餘背面朝上放在桌面的中央，參與遊戲者依序從牌堆中每次抽取一張，也可以不抽，直到沒人想抽牌為止。這時各人將手中的牌亮出，各自計算點數和，多者為優勝，但是點數和卻不可超過「10點半」，超過者即判定為最後一名。另外，一旦有人持有五張牌，點數和又不超出10.5，不論其點數和多寡，即為優勝。

對於上述最後一項規則，亦即持有五張牌而不超過十點半即為優勝的規定，大家玩了許多年，卻很少有人思考一下其原由。這條規定固然是要增進遊戲的趣味，但是為什麼一旦出現這種情況，就可不論點數高低而論勝負呢？你一定會說這是一種很難得的情況。但是它有多難得呢？讓我

來算算看吧！

表6.21是5張牌點數和不超過十點半的組合及機率，在該表中我們忽略牌的排列順序，同時以「H」來代表「J」、「Q」和「K」，亦即點數爲半點者。這裡總共有60種情形，我們利用超幾何分配去計算其個別出現的機率，分列於表6.21的最右邊一行。將這些機率相加，可得出現這60種情形的機率爲0.05082。換句話說，如果你每次都拿到這種牌真的很難得，取得優勝乃爲天意。

表6.21　撲克牌點數和不超過「10點半」的組合

撲克牌組合	點數和	發生機率
HHHHH	2.5	C_5^{12}/C_5^{52}
A	3.0	$C_4^{12}C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
8	10.0	$C_4^{12}C_1^4/C_5^{52}$
HHHAA	3.5	$C_3^{12}C_2^4/C_5^{52}$
2	4.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
8	10.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHH22	5.5	$C_3^{12}C_2^4/C_5^{52}$
3	6.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
7	10.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHH33	7.5	$C_3^{12}C_2^4/C_5^{52}$
4	8.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
6	10.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHH44	9.5	$C_3^{12}C_2^4/C_5^{52}$
5	10.5	$C_3^{12}C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHAAA	4.0	$C_2^{12}C_3^4/C_5^{52}$
2	5.0	$C_2^{12}C_2^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
7	10.0	$C_2^{12}C_2^4C_1^4/C_5^{52}$
HHA22	6.0	$C_2^{12}C_1^4C_2^4/C_5^{52}$
3	7.0	$C_2^{12}C_1^4C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
6	10.0	$C_2^{12}C_1^4C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHA33	8.0	$C_2^{12}C_1^4C_2^4/C_5^{52}$
4	9.0	$C_2^{12}C_1^4C_1^4C_1^4/C_5^{52}$

5	10.0	$C_2^{12}C_1^4C_1^4C_1^4/C_5^{52}$
HHA44	10.0	$C_2^{12}C_1^4C_2^4/C_5^{52}$
HH222	7.0	$C_2^{12}C_3^4/C_5^{52}$
3	8.0	$C_2^{12}C_2^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
5	10.0	$C_2^{12}C_2^4C_1^4/C_5^{52}$
HH333	10.0	$C_2^{12}C_3^4/C_5^{52}$
HAAAA	4.5	$C_1^{12}C_4^4/C_5^{52}$
2	5.5	$C_1^{12}C_3^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
7	10.5	$C_1^{12}C_3^4C_1^4/C_5^{52}$
⋮	⋮	⋮
H2222	8.5	$C_1^{12}C_4^4/C_5^{52}$
3	9.5	$C_1^{12}C_3^4C_1^4/C_5^{52}$
4	10.5	$C_1^{12}C_3^4C_1^4/C_5^{52}$

附註：H 代表出現「J、Q 或 K」，點數為半點。

下次郊遊時玩「10點半」的話，你可順便做個隨機實驗，觀察一下拿五張牌仍不出局的機會有多少。但也要記住別老是做隨機實驗，也可以玩玩別的遊戲。更要緊的是，別賣弄你的統計學得多好，只要把機率算給大家看就可以了！

6.8 Excel的使用

在求算標準化隨機變數與求取二項分配、超幾何分配、波瓦松分配的機率時，可利用Excel 的函數精靈 f_x 來進行。茲以二項分配機率的求算為例，說明其步驟如下：

1.選取「f_x」、函數種類：「統計」、函數名稱：「BINOMDIST」、按確定。

2.在number_s空白方格輸入 X 的值(成功的次數)，在 trials 空白方格輸入試行的次數 n，在 probability 空白方格輸入成功的機率，在 cumulative 空白方格輸入true。如果在 cumulative 空白方格輸入false，產生的機率為 $P(X=x)$；如果在 cumulative 空白方格輸入true，產生的機率為累加機率 $P(X \le x)$。

另外，求算波瓦松分配、超幾何分配的方法與二項分配相同，其函數名

爲「POISSON」與「HYPGEOMDIST」。再者，標準化變數的求取步驟爲：選取「f_x」、函數種類：「統計」、函數名稱：「STANDARDIZE」然後輸入要標準化的 X 值，平均數與標準差。求算組合時可用「數學與三角函數」中的「COMBIN」功能。

6.9　摘要

隨機變數是隨機實驗結果的數值表現，是隨機實驗中對應樣本點實數值的函數。隨機變數與一般的變數(非隨機變數)不同，一般變數的各個不同的值的發生是確定的，而隨機變數的各個變量則是依某一機率發生的。變數的個數只有一個的稱爲單一隨機變數；個數爲兩個時稱爲二元隨機變數；當變數的數目爲三個以上時稱爲多元隨機變數。(二元及多元隨機變數將於第8章介紹)隨機變數又可依其數值的特性分爲間斷隨機變數與連續隨機變數兩種。

隨機變數各個變量發生的機率稱爲隨機變數的機率分配。由機率分配可以求出某一區間的機率及其期望值、變異數及標準差。隨機變數可以標準化而得到標準化隨機變數，藉此可以進行比較的工作。

本章介紹常用的四種間斷機率分配：二項分配、超幾何分配、波瓦松分配與幾何分配。在應用這些機率分配時，我們應先看看事件是否符合其假設條件，然後再求其平均數，變異數等。現實世界中，有許多的事件符合這些機率分配的假設條件，因此當我們碰到這樣的情況時，我們可直接立即引用。

表6.22　間斷機率分配的函數、平均數與變異數

機率分配名稱	機率函數	平均數	變異數
二項分配	$f(x)=C_x^n p^x q^{n-x}\quad x=0,1,2,\cdots,n$	np	npq
超幾何分配	$f(x)=\dfrac{C_x^K C_{n-x}^{N-K}}{C_n^N}\quad x=0,1,2,\cdots,n$ $x\le k\quad n-x\le N-k$	$n\cdot\dfrac{K}{N}$	$n\cdot\dfrac{K}{N}\cdot\dfrac{N-K}{N}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$
波瓦松分配	$f(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\quad x=0,1,2,\cdots,\infty$	λ	λ
幾何分配	$f(x)=q^{x-1}p\quad x=1,2,\cdots,\infty$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$