

7 連續隨機變數及其常用的機率分配

學習目的

1. 熟悉並計算連續機率分配機率函數的期望值與變異數。
2. 了解常態分配的意義、特質與重要性。
3. 了解標準常態分配的意義、性質與利用標準常態分配求機率。
4. 了解均等分配、指數分配的意義及性質並計算其期望值與變異數。
5. 比較超幾何分配、二項分配、波瓦松分配與常態分配。
6. 利用Excel計算各個連續機率分配並繪製圖形。

本章結構

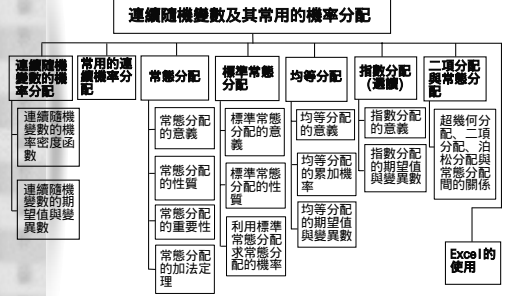


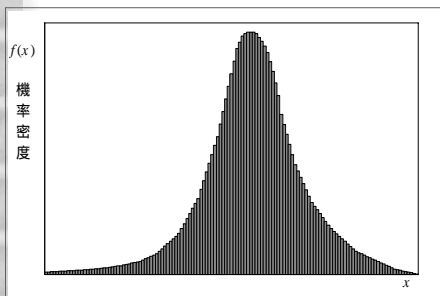
表7.1 計算機使用壽命的機率分配

使用壽命 x	單位組距	次數 f	相對次數
60~62	1	48	0.009
62~64	1	108	0.020
64~66	1	270	0.049
66~68	1	486	0.088
68~70	1	810	0.147
70~72	1	1,026	0.186
72~74	1	864	0.157
74~76	1	702	0.128
76~78	1	540	0.098
78~80	1	378	0.069
80~82	1	216	0.040
82~84	1	52	0.009
		$\sum f = 5,500$	1.000

表7.2 計算機使用壽命的機率分配

使用壽命 x (1)	組距 (2)	相對次 數密度 (3)	相對次數 (4) = (2) × (3)
60-62	2	0.0045	0.009
62-64	2	0.0100	0.020
64-66	2	0.0245	0.049
66-68	2	0.0440	0.088
68-70	2	0.0735	0.147
70-72	2	0.0930	0.186
72-74	2	0.0785	0.157
74-76	2	0.0640	0.128
76-78	2	0.0490	0.098
78-80	2	0.0345	0.069
80-82	2	0.0200	0.040
82-84	2	0.0045	0.009
			1.000

圖7.3 機率曲線



連續隨機變數的機率分配

○ 機率密度函數

設 X 為連續隨機變數，其值為 $a < X \leq b$ ，若 $f(x)$ 滿足下列二條件：

① $f(x) \geq 0$ ② $\int_a^b f(x) dx = 1$

則 $f(x)$ 為 X 的機率密度函數(probability density function)，簡稱pdf。

○ 累加機率函數

$$F(X = x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(x) dx$$

○ 期望值

$$E(X) = \int_a^b xf(x) dx = \mu \quad (a \leq X \leq b)$$

○ 變異數

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx$$

○ 標準差

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

常態分配

○ 常態分配的定義

設 X 為連續隨機變數，若其機率密度函數為：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

式中： $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0, \pi = 3.1416, e = 2.7183$ 。

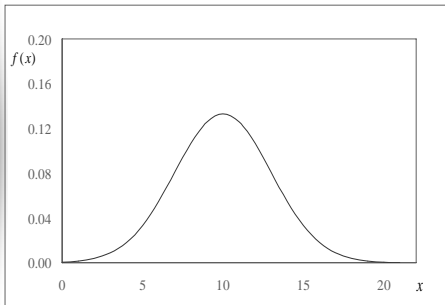
則稱此 $f(x)$ 為常態分配。

常態分配

○ 常態分配的特質

- ① 常態分配 $f(x)$ 為以 μ 為中心的對稱分配。
- ② 常態分配曲線下面的面積總和等於1。
- ③ 常態分配 $f(x)$ 在 $X = \mu \pm \sigma$ 時有一轉折點。
- ④ 常態分配曲線的兩尾無限延伸。
- ⑤ 常態分配的機率範圍可分為三種情況。

圖7.6 常態分配圖



上圖為平均數 $\mu = 10$ ，標準差為 $\sigma = 3$ 的常態分配。

圖7.7 平均數相同標準差不同

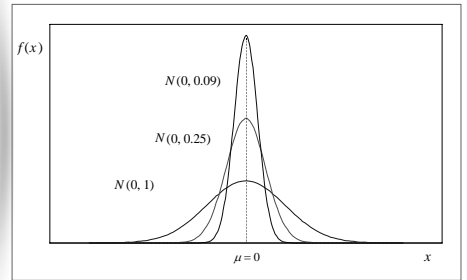


圖7.8 平均數不同標準差相同

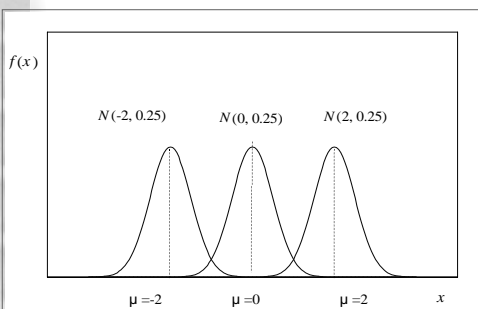


圖7.10 常態分配的對稱性

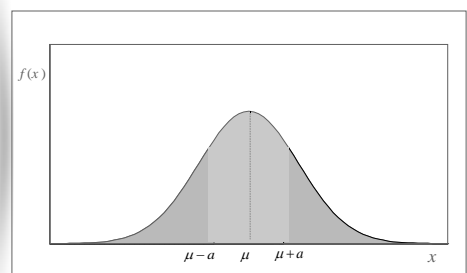
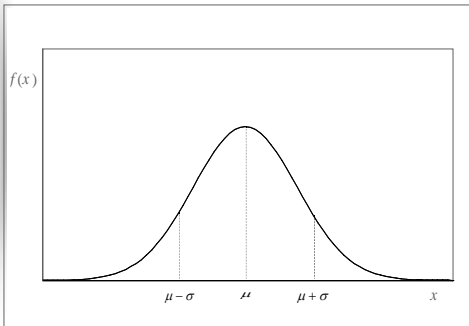


圖7.11 常態分配的轉折點



林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 2002

常態分配

○ 常態分配的機率範圍

① 常態隨機變數的值落在離開平均數1個標準差等距的範圍(即 $\mu \pm \sigma$)之機率為：

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$$

② 常態隨機變數的值落在離開平均數2個標準差等距的範圍(即 $\mu \pm 2\sigma$)之機率為：

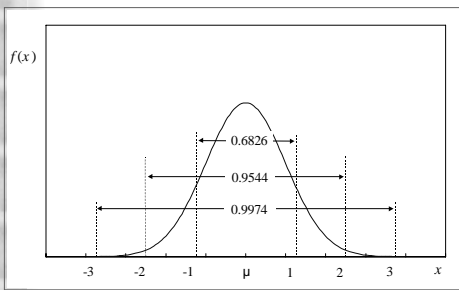
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

③ 常態隨機變數的值落在離開平均數3個標準差等距的範圍(即 $\mu \pm 3\sigma$)之機率為：

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$$

林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 2002

圖7.12 常態分配的機率範圍



林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 2002

常態分配

○ 常態分配的重要性

- ① 常態分配可做為在統計推論程序中的基本模式
- ② 常態分配可進行許多統計推論
- ③ 常態分配構成大樣本推論統計的基礎
- ④ 間斷機率分配在某些條件下可利用常態分配求其近似值

林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 2002

常態分配

○ 常態分配的加法定理

定理1 設 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，若 $W = a + bX$ 則

$$W \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

定理2 設 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ， $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且 X, Y 獨立，若

$$W = aX + bY$$

則

$$W \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 2002

標準常態分配

○ 標準常態分配

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

式中 $Z = (X - \mu) / \sigma$ 標準常態變數。標準常態分配其平均數為 0，變異數為 1。一般以 $Z \sim N(0, 1)$ 來表示。

林惠玲 陳正金著 雙葉書局發行 1988

圖7.13 標準常態曲線

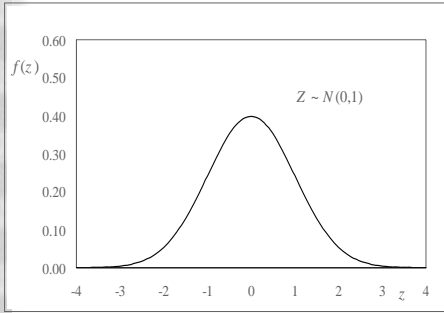


圖7.14 標準常態分配機率(0與 z_0 間)

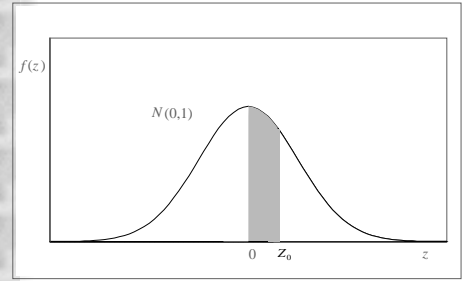


表7.4 標準常態機率分配表

z	Z 的第二位小數									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

圖7.15 Z在0與0.54間的機率值

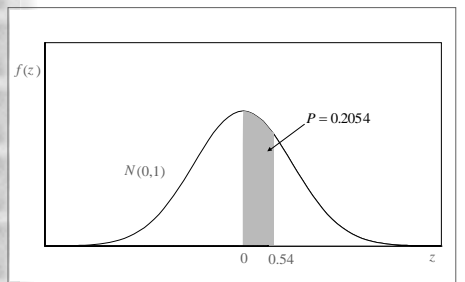


圖7.17 $Z > 0.54$ 的標準常態機率值

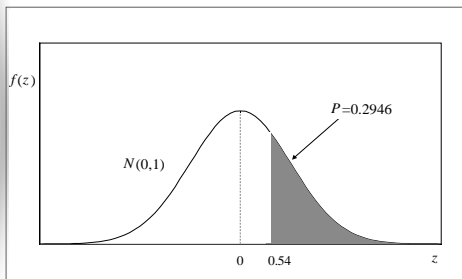


圖7.18 $-0.5 < Z < 1$ 的標準常態機率值

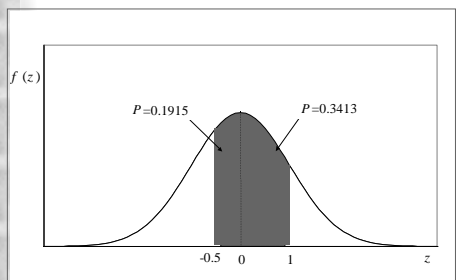


圖7.19 $Z > -0.35$ 的標準常態機率值

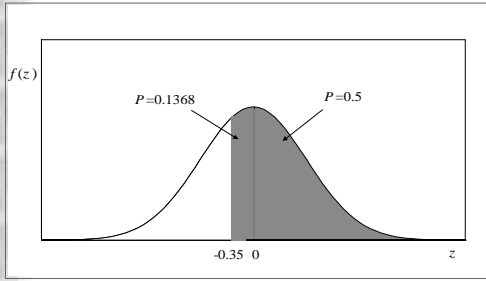


圖7.21 $Z > z$ 的標準常態機率值

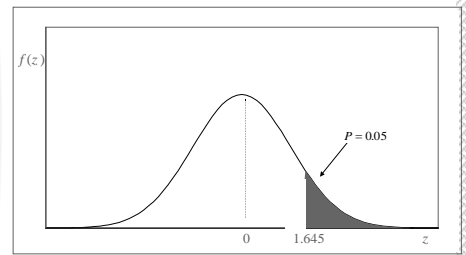
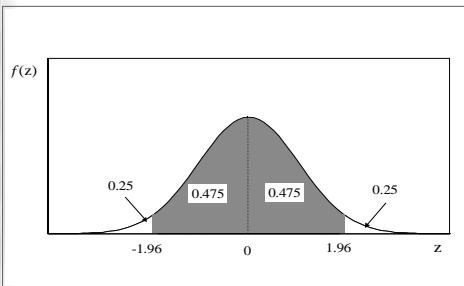


圖7.23 $-z_0 < Z < z_0$ 的標準常態機率值



標準常態分配

○利用常態分配求常態分配機率

- ①將隨機變數 X 化為標準隨機變數 Z 。同時將 a 值與 b 值標準化：

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, a' = \frac{a - \mu}{\sigma}, b' = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

- ②其次，將 Z, a', b' 代入 $P(a < X < b)$ ，即

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P(a' < Z < b')$$

- ③依照查標準常態分配機率值表的方法查表，即可求得機率值。

圖7.24 常態分配與標準常態分配

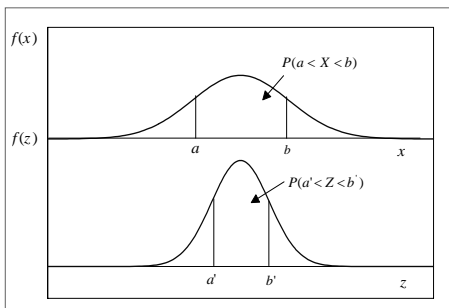


圖7.25 $8.5 < X < 11.5$ 的機率

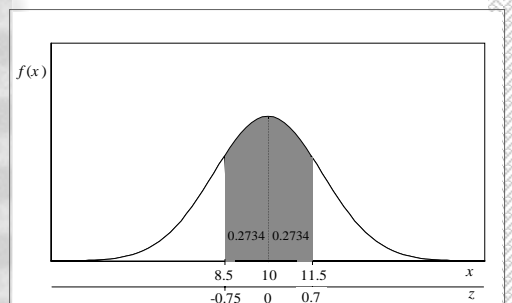


圖7.28 咖啡的常態分配

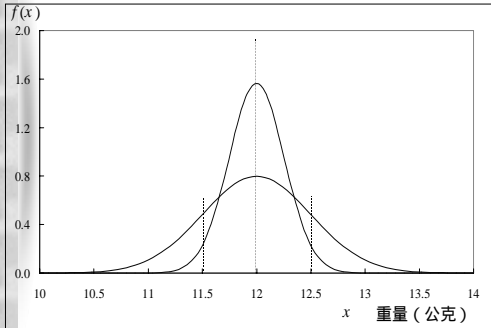


圖7.31 大巧便當的標準常態分配

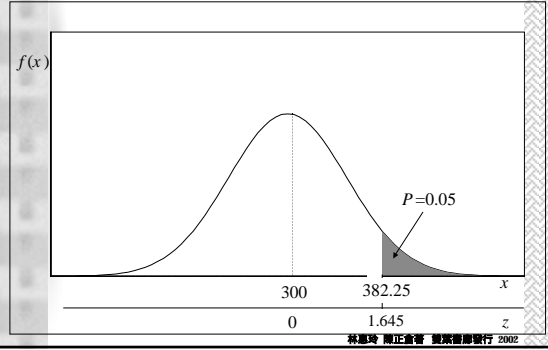
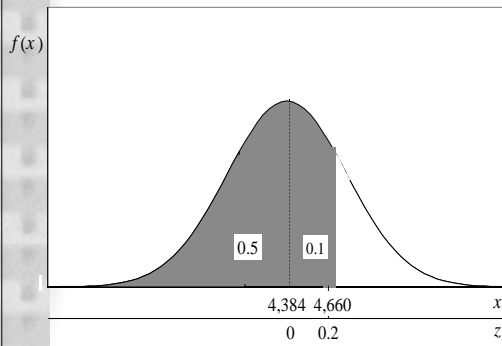


圖7.33 合理的停車費



均等分配

○ 機率密度函數

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq X \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

○ 累加機率函數

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

○ 期望值

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

○ 變異數

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

圖7.34 均等分配

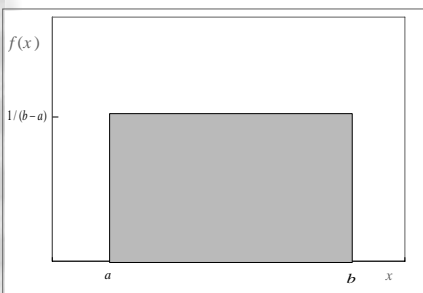
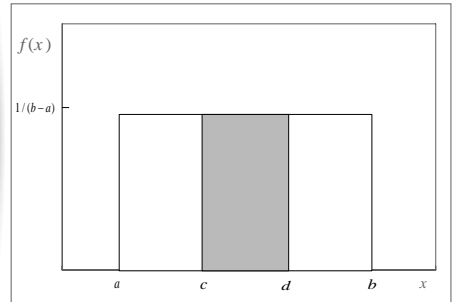


圖7.35 均等分配的機率



指數分配 (選讀)

○ 指數分配

若 X 為連續的隨機變數，其機率密度函數為：

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0, \lambda > 0$$

則 $f(x)$ 為指數分配，式中： λ 為單位時間事件發生的平均數。

○ 期望值

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

○ 變異數

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

圖7.36 指數分配

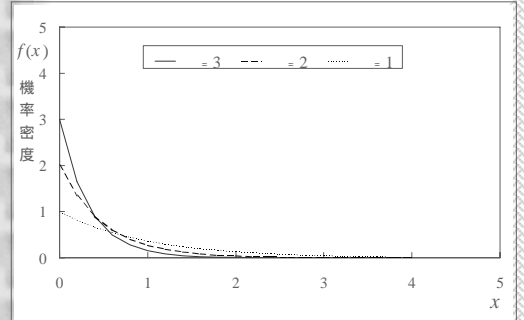


圖7.37 $P(X > x)$ 的機率

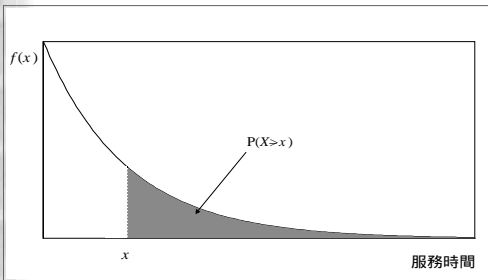


圖7.38 銀行行員的服務一個客戶的時間

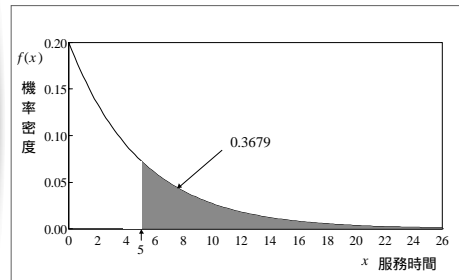


表7.5 二項分配與常態分配

1	A	B	C	D
2	x	二項	常態	
3	0	0.00244	0.000571	
4	1	0.00293	0.00357	
5	2	0.016113	0.016002	
6	3	0.053711	0.05139	
7	4	0.12085	0.118254	
8	5	0.193359	0.194973	
9	6	0.225586	0.230336	
10	7	0.193359	0.194973	
11	8	0.12085	0.118254	
12	9	0.053711	0.05139	
13	10	0.016113	0.016002	
14	11	0.00293	0.00357	
15	12	0.00244	0.000571	

圖7.42 二項分配與常態分配

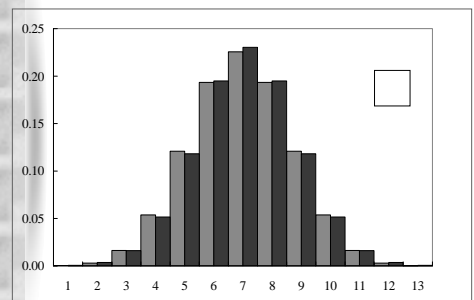


圖7.43 不連續的機率分配

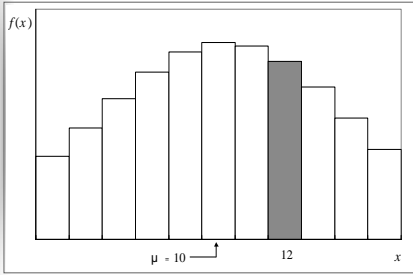


圖7.44 連續機率分配

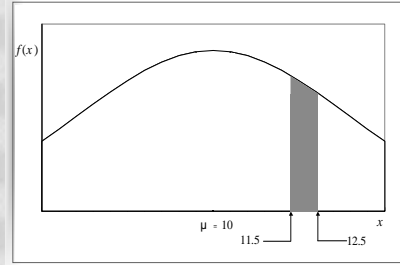


圖7.47 幾個分配間的关系

